EL ROL DE VOLTERRA Y DE FRÉCHET EN LA INTRODUCCIÓN DE LOS CONCEPTOS DE DERIVADA Y DIFERENCIAL EN LOS ESPACIOS ABSTRACTOS

VICTOR HUGO GIL AVENDAÑO

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

SANTIAGO DE CALI

2019

EL ROL DE VOLTERRA Y DE FRÉCHET EN LA INTRODUCCIÓN DE LOS CONCEPTOS DE DERIVADA Y DIFERENCIAL EN LOS ESPACIOS ABSTRACTOS

VICTOR HUGO GIL AVENDAÑO

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de magister en educación énfasis educación matemática

Director
LUIS C. RECALDE, Mg, Dr.
Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

SANTIAGO DE CALI

2019

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

SANTIAGO DE CALI

VICTOR HUGO GIL AVENDAÑO

EL ROL DE VOLTERRA Y DE FRÉCHET EN LA INTRODUCCIÓN DE LOS CONCEPTOS DE DERIVADA Y DIFERENCIAL EN LOS ESPACIOS ABSTRACTOS

TEMAS Y PALABRAS CLAVES

Diferencial abstracta, Espacios abstractos, Derivada de Volterra, Diferencial de Fréchet, Historia del análisis funcional.

Notas de aprobación

El trabajo de grado titulado «EL ROL DE VOLTERRA Y DE FRÉCHET EN LA INTRODUCCIÓN DE LOS CONCEPTOS DE DERIVADA Y DIFERENCIAL EN LOS ESPACIOS ABSTRACTOS», presentado por el estudiante VICTOR HUGO GIL AVENDAÑO, para optar al título de magister en educación énfasis educación matemática, fue revisado por el jurado y calificado como:

APROBADO

Dr. Luis C. Recalde.
Director

Dr. Gabriela I. Arbeláez R.
Jurado

Dr. Andrés Chaves Beltrán
Jurado

Febrero de 2019

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Resumen

Desde un enfoque histórico-epistemológico en este trabajo evidenciamos la consolidación de las nociones de derivada y de diferencial en su proceso de extension y generalización. Para tal efecto, realizamos un estudio de la evolución del pensamiento geométrico, variacional y analítico a través de la resolución de ciertos problemas que confluyen en el surgimiento del concepto de funcional y el posterior desarrollo del cálculo diferencial en espacios de naturaleza cualquiera; conceptos cada vez más útiles en las investigaciones en matemáticas.

A través de un análisis histórico-epistemológico del desarrollo conceptual de las nociones de derivada y de diferencial se muestran las apuestas teóricas en el propósito de admitir definiciones cada vez más acordes a cada campo de acción, centrándonos con especial interés en la época comprendida entre finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX. Estudiamos la génesis, consolidación y formalización de las diferentes definiciones de diferencial y derivada, prestando especial atención en los trabajos de Vito Volterra y de Maurice Fréchet. Todo esto en el marco de la emergencia del análisis funcional como rama de las matemáticas. Se muestra que este campo teórico tiene como elemento de causalidad la solución de problemas relativos al cálculo de variaciones y a la extensión de algunos métodos del análisis clásico a los espacios abstractos.

Se muestra además que el desarrollo de la noción de funcional no puede ser entendido como una mera transferencia de los resultados provenientes del análisis clásico de funciones; y para abordarlos fue necesario que los matemáticos desarrollaran diferentes técnicas, en las cuales notamos un potencial formativo a favor del conocimiento de los matemáticos en formación, evidenciando una relación entre las intenciones de formación y los objetos matemáticos de estudio.

Introducción

Aunque este trabajo es de tipo histórico-epistemológico, se abordan también cuestiones de tipo ontológico que son de gran importancia para aportar a la discusión sobre la naturaleza de los objetos matemáticos llamados funcionales. En este trabajo se mezclan y combinan diversos tópicos de matemáticas avanzadas, las cuales pueden tomarse como referencia por la teoría de la educación matemática. En este sentido se precisan algunos aspectos relevantes sobre la naturaleza del conocimiento matemático y sobre algunos aspectos como los diferentes tipos de pensamiento matemático que se evidencian en los matemáticos creadores. De esta forma, si bien es un trabajo de corte epistemológico ha sido elaborado con propósitos pedagógicos.

El estudio histórico-epistemológico de las matemáticas constituye una herramienta imprescindible para los docentes que procuran que los matemáticos en formación se acerquen, apropien y comprendan los conceptos y procesos matemáticos. Es de suma importancia que los docentes tengan conocimiento de cómo los conceptos matemáticos han evolucionado, cuales fueron los diversos procesos de formación de los conceptos matemáticos y de manera global comprender las particularidades de la actividad matemática.

Una temática de investigación en el campo de la educación matemática es la del pensamiento variacional y sus diversas representaciones, mediante la cual busca estudiar los fenómenos de enseñanza, de aprendizaje y de comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio; el término variacional está estrechamente ligado al concepto de variación, el cual es entendido como la cuantificación del cambio; el estudio de la variación de diferentes situaciones generó las ideas fundamentales del cálculo diferencial. Uno de los primeros acercamientos a la noción de derivada de una función real de variable real se produce cuanto se pretende cuantificar la variación de la variación (segundas variaciones) entre dos estados consecutivos E_1 y E_2 de un sistema dado mediante el residuo de las sustracciones entre $E_2 - E_1$, cuando la variable independiente cambia de forma constante; este acercamiento y otros como la concepción algebraica de la derivada y la de definir la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto producen en maestros y estudiantes creencias y concepciones particulares del concepto de derivada en funciones reales de variable real.

En el proceso de definir la derivada de una función real de varias variables reales alrededor de un punto dado, se presentan una serie de aspectos que son de suma importancia para la didáctica de las matemáticas. Estos aspectos son, entre otros:

- ¿Cómo cuantificar las variaciones, cuando las variaciones de la función dependan de la dirección en la que se acercan al punto dado?
- La existencia de las derivadas direccionales (derivadas parciales) no garantizan el conocimiento de la variación total de la función en dicho punto.
- La diferenciabilidad de una función depende de la existencia de una transformación lineal.

A medida que se continúa con el proceso de generalización de la derivada, se van presentando problemas mas complejos al momento de cuantificar la variación.

Es adecuado resaltar que el problema planteado en esta tesis tiene una doble intencionalidad: primero, caracterizar las principales concepciones identificadas en la evolución histórica de las nociones de derivada y diferencial en el análisis general y, segundo, propiciar una reflexión acerca de los procesos de enseñanza y de aprendizaje del cálculo diferencial en espacios abstractos; problema importante en la formación de matemáticos. Lo anterior nos invita a reflexionar sobre dos caras de la misma moneda, el rol del investigador en matemáticas y el rol del docente en nuestro contexto local; máximo que generalmente, a los estudiantes de las careras de matemáticas los forman matemáticos de profesión, con poca formación didáctica.

Tradicionalmente en la formación de matemáticos se observa una dualidad entre el formalismo, abanderado por el rigor lógico en la enseñanza de las matemáticas y el tratamiento pedagógico, relativo a la transposición de los conceptos matemáticos. En nuestro medio, con el ánimo de que el futuro matemático se involucre rápidamente en las investigaciones de vanguardia se sacrifica el sentido y la comprensión. Estas prácticas educativas difícilmente permiten la generación de conocimiento matemático .

Los aspectos mencionados anteriormente, evidencian la necesidad de comprender los diferentes contextos de aprobación, validación, institucionalización y significación histórica y filosófica de los conceptos, nociones, técnicas, algoritmos y objetos matemáticos, los cuales son los elementos fundamentales de trabajo de un matemático, es por eso que se pretende no solo hacer un tratamiento desde el punto de vista de procedimientos y técnicas novedosas en cada periodo histórico, sino también se pretende poner en evidencia las diferentes posturas respecto a cuestiones epistemológicas y eventualmente filosóficas. Desde esta perspectiva esta investigación histórica-epistemológica tiene una intención pedagógica.

Desde el punto de vista socio-cultural es conveniente reconocer a las matemáticas como una ciencia en continua evolución que está fuertemente determinada por el contexto cultural y social. De esta manera, se parte del supuesto que las matemáticas van más allá del discurso formal o de una miscelánea de técnicas y algoritmos útiles a las demás ciencias; debemos considerar que las matemáticas son una actividad humana de razonamiento que aporta a la explicación del mundo y al desarrollo de pensamiento formal, y es por ello que debemos encaminar nuestros esfuerzos en la preparación de matemáticos que tengan una visión integral del constructo matemático conociendo las diversas condiciones socio-culturales que se presentaron a lo largo de la historia.

Con el propósito de estudiar la manera en que los matemáticos en formación conciben los conceptos de derivada y diferencial en el análisis general, debemos partir de los significados que históricamente se le han atribuido a dichos conceptos; claro está que estos significados no se pueden encontrar en los libros de texto, pues estos se supeditan a un conocimiento matemático terminado, pulido y adaptado a las convenciones científicas rigurosas, ocultándose las dificultades y obstáculos que permitieron evolucionar los conceptos hasta llegar a la fase de institucionalización de los conceptos matemáticos. Por lo tanto es necesario recurrir a la historia, epistemología y filosofía de las matemáticas, además de las investigaciones en educación matemáticas para acercarnos a los elementos constitutivos de la significación de los conceptos mencionados anteriormente. Los aspectos antes mencionados se desarrollan en cuatro capítulos, los cuales se especifican a continuación.

En el primer capítulo se exhibe un panorama general sobre la ubicación histórica del problema de la derivada como soporte metodológico para entender el desarrollo histórico del cálculo diferencial en espacios de naturaleza cualquiera. Así, llegamos a presentar un marco de interrogantes que configuran el problema que aborda este trabajo. Concluimos este capítulo exponiendo la intencionalidad de este proyecto de investigación.

El segundo capítulo inicia con una periodización que llamamos la *escuela italiana*, representada por varias figuras prominentes, sobre las cuales gira un contexto que permite establecer interconexiones y contrastes con otros matemáticos. Por otro lado hacemos una presentación de los resultados de Vito Volterra referentes a su teoría de *funciones que dependen de otras funciones* como catalizador de su programa de investigación. Concluimos este capítulo con el desarrollo de la derivada de Vito Volterra.

El tercer capítulo gira entorno al cálculo diferencial desarrollado por Maurice Fréchet. Presentamos el programa investigativo de Fréchet, analizando de manera especial los conceptos que le permitieron desarrollar de manera rigurosa la teoría de espacios métricos.

En el capítulo cuatro, exhibimos las diferentes nociones de diferencial propuestas por diversos matemáticos, presentando contrastes con las definiciones desarrollado por Volterra y posteriormente por Fréchet; además de evidenciar algunos contraejemplos sobre las diferentes definiciones de diferencial que le permitieron a Fréchet posteriormente refinar su definición de diferencial en espacios abstractos.

Finalmente, en el quinto capítulo, exponemos de manera sintética las conclusiones del trabajo de grado presentando un análisis sobre los programas de investigación de Volterra y de Frechet, los cuales nos aclaran el panorama sobre las maneras de hacer matemáticas.

Esperamos que de alguna manera, esta investigación permita a los matemáticos en formación y docentes en ejercicio, tener una mejor aprehensión de las nociones de derivada y diferencial en espacios abstractos. Más allá de un caso particular, se trata de que tomen conciencia de la importancia de los estudios históricos, pues el conocimiento de la evolución histórica de los conceptos nos muestra las razones epistemológicas que han dado lugar a las teorías modernas, lo cual tiene un alto valor en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.

Capítulo 1

Ubicación histórica del problema de la derivada

Uno de los antecedentes más antiguos de la derivada, como noción matemática, tiene relación con el proceso histórico de generalizar la noción de recta tangente de una circunferencia a una curva cualquiera. Euclides (325-265 a.C.) en en el libro II de los *Elementos* presenta la siguiente definición:

> Se dice que una recta es tangente a un círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta (Vera, 1970, Vol. 1, p. 750).

En esta definición Euclides está incorporando el concepto de intersección unitaria de una curva particular (la circunferencia) y una recta (la tangente). Más tarde, Arquímedes (287-212 a.C.) y Apolonio (262-190 a.C.), extenderán la noción a las cónicas. Pero todas estas son curvas que no cambian de concavidad; en el caso de la hipérbola, se define para cada una de las ramas. Arquímedes extiende el concepto a la espiral, en la proposición 13 de su tratado *Sobre las espirales* (Vera, 1970, Vol. 2, p. 164).

En los siglos XVI y XVII, muchos matemáticos, entre ellos René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Evangelista Torricelli (1608-1647) y Gilles de Roberval (1602-1675), se plantean el problema de trazar tangentes no sólo a las curvas más conocidas sino también a otro tipo de curvas que se van construyendo. Precisamente en el libro segundo, *De la naturaleza de las lineas curvas*, de la *Geometría*, Descartes hace una ampliación del universo de las curvas, establece clasificaciones y estudia sus propiedades. Es interesante la forma como Descartes generaliza el concepto de curva admisible en geometría. La idea fundamental que articula su trabajo reposa en la construcción misma. En la antigüedad griega sólo se concebían aquellas curvas que se describían por un movimiento continuo del compás y la regla, o aquellas que resultan al interceptar sólidos con planos. Descartes multiplica los movimientos del compás obteniendo nuevas curvas a las ya antes anotadas. Es importante especificar aquí, que la aceptación de los "nuevos objetos" matemáticos, está supeditada en Descartes al reconocimiento de sus propiedades. De esta manera excluye aquellas curvas que no puedan ser construidas con su compás generalizado (mecanismo articulado), es decir las curvas llamadas mecánicas y que más tarde Leibniz llamará trascendentes. Pero hay que ser mas específicos en este punto, dado que justamente el proceso de generalización de Descartes se acerca a la manera de Fréchet en el sentido de reconocer propiedades de los *nuevos objetos*; es decir, en la forma de exhibirlos. Para Descartes es claro, que hablar de curvas es poder describir sus propiedades, justamente las llamadas curvas mecánicas son excluidas porque no existe manera de conocer sus propiedades a través de procedimientos específicos. Al contrario de éstas, las curvas construidas por su mecanismo articulado se pueden representar mediante ecuaciones algebraicas y para algunas de ellas existen procesos para el trazado de sus normales y tangentes (Descartes, 1947, p. 73).

A continuación mostraremos el método seguido por Descartes para la determinación de la normal a la curva en el punto F de coordenadas (x_0, y_0). Se establecen las siguientes asignaciones:

$$FM = x,\ AM = y,\ AP = v,\ FP = s.$$

Usemos entonces notación moderna para Desarrollar el proceso seguido por Descartes. Supongamos que la curva está dada por la ecuación $x = f(y)$

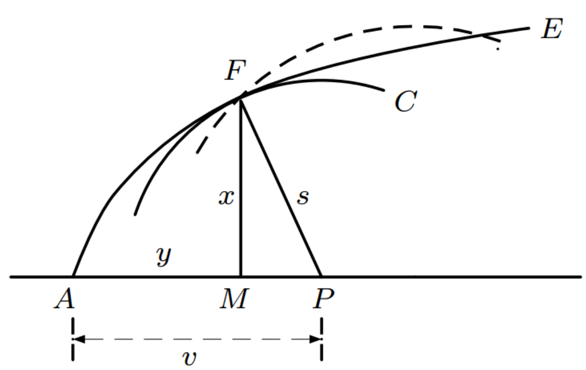

Figura 1.1: La tangente de Descartes

Consideremos la circunferencia C con centro en P y que pasa por F, esta tiene por ecuación $x^2 + (v - y)^2 = s^2$. De manera general se tiene que esta circunferencia corta a la curva AFE en dos puntos, uno de los cuales, evidentemente, es F. Los dos puntos de corte se hallan solucionando la ecuación:

$$(f(y))^2 + (v - y)^2 - s^2 = 0,$$

la cual tiene dos raíces. De esta forma se obtienen las distintas circunferencias que pasan por F y que se trazan haciendo centro en diferentes puntos P localizados en la prolongación de AM. El segmento que va del centro de la circunferencia al punto F, será la normal cuando la ecuación anterior tenga dos raíces iguales. [1]

En términos modernos, Descartes nos proporciona un método alternativo al usual para calcular tangentes. Apliquemos la técnica de Descartes al caso de una función de la forma $y = f(x)$. Partamos de la ecuación

$$(f(x))^2 + (v - x)^2 - s^2 = 0 \tag{1.1}$$

pero una función algebraica con una raíz doble $x = k$, debe ser de la forma $(x - k)^2 \sum b_n\, x^n$, de modo que se puede imponer la condición de raíz doble anterior de la forma:

$$(f(x))^2 + (v - x)^2 - s^2 = (x - k)^2 \sum b_n\, x^n.$$

Identificando coeficientes se encuentra el valor de v, en términos de la raíz doble k.

De acuerdo a lo expresado anteriormente, calculemos la recta normal y la recta tangente a la parábola $y^2 = 4x$ en el punto $(1, 2)$. En este caso la ecuación 1.1 ahora se escribe como

$$4x + (v - x)^2 - s^2 = (x - k)^2.$$

Identificando coeficientes se obtiene que $v = k + 2$, sustituyendo $x = k$, la *subnormal* vendrá dada por $v - x = 2$, y las ecuaciones de la recta normal y la recta tangente en el punto $(1, 2)$ son:

[1] La geometría analítica transformó el problema de las cuadraturas en el problema de hallar el área bajo la curva. Como ya lo mencionamos anteriormente, en su *Geometría*, Descartes establece clasificaciones de curvas e incorpora la representación algebraica de algunas de ellas, el universo de las curvas aumenta. A partir de Descartes, el problema de las cuadraturas empieza a tener visos de cálculo.

$$
\begin{aligned}
r_n &: \quad y - 2 = \frac{2}{1-3}\,(x-1), \quad \text{con} \quad m_n = -1,\\
r_t &: \quad y - 2 = \frac{3-1}{2}\,(x-1), \quad \text{con} \quad m_t = 1
\end{aligned}
$$

por lo que $f'(1) = 1$, tal y como puede comprobarse utilizando las reglas de derivación.

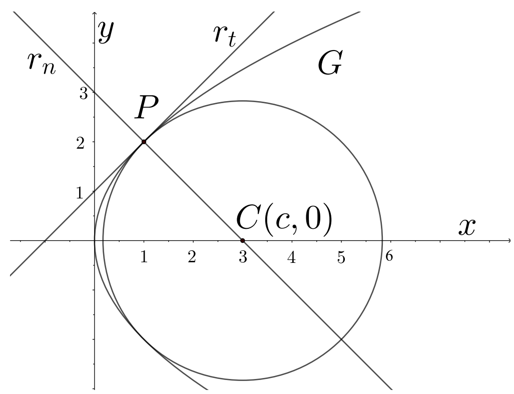

Figura 1.2: Aplicación del método de Descartes

Otra clase de métodos usados para trazar tangentes fueron establecidos por Guilles Persone de Roberval y Evangelista Torricelli, quienes utilizaron argumentos cinemáticos. Estos métodos se basan en la idea de considerar la curva como la trayectoria de un punto en movimiento y la tangente en un punto particular se considera como la dirección del movimiento en ese mismo punto. De esta manera se incorporan curvas como la cicloide, la cuadratriz y la cisoide (Ausejo, 1993, p. 17). Por ejemplo en el caso de la cisoide, el método consiste en considerar que un punto P de la cisoide esta sujeto a un movimiento de traslación horizontal en la dirección PS y a otro de rotación alrededor del centro O de la circunferencia generatriz, luego en la dirección PR tangente a la circunferencia generatriz cuando esta gira sobre la recta AB. Como el movimiento de traslación es igual al de rotación, la bisectriz PT del ángulo SPR es la tangente a la cisoide en el punto P (ver figura 1.3).

Advertimos entonces que el proceso de incorporar curvas cada vez más complejas involucra dos aspectos correlacionados: la identificación de los objetos particulares, en nuestro caso las curvas, y la caracterización de sus propiedades, como por ejemplo, el trazado de su tangente.

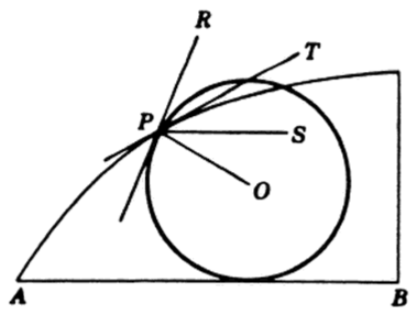

Figura 1.3: Método cinemático

Es necesario aclarar que para la que estos nuevos objetos y métodos matemáticos sean incorporados en un corpus teórico es necesaria la aprobación por parte de la comunidad matemática. En otras palabras, la incorporación de objetos matemáticos pasa por la sanción de los matemáticos en un proceso dinámico de construcción social de las matemáticas. Históricamente entonces es bastante diciente, por ejemplo, que el método de las tangentes de Roberval fuera usado de manera semejante por Newton, para curvas trascendentes como la cuadratriz. Sin embargo, el método cinemático de Roberval era aplicable únicamente para algunas curvas, puesto que partía de sus propiedades particulares y no suponía ningún método algorítmico. Justamente, estamos aquí muy próximos de la generalización de la noción de tangente a una curva cualquiera, mediada por la extensión y generalización del dominio de definición de las curvas.

Con Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) hay un cambio de perspectiva con respecto al cálculo de áreas y a la construcción de la recta tangente a una curva en un punto determinado. Es conveniente reiterar que Descartes ha planteado una primera salida general al problema por medio de la restricción a las curvas algebraicas[2]. Los métodos algebraicos imperaron durante muchos siglos en matemáticas. No se puede hablar del análisis como disciplina independiente; para entender esto es importante revisar la definición de análisis que da Jean le Rond D'Alambert (1717-1783) en la Enciclopedia metódica de Denis Diderot (1713-1784):

> *Análisis* es el método utilizado para resolver problemas matemáticos al reducirlos a ecuaciones. El análisis, para resolver todos los problemas, utiliza la ayuda del álgebra o del cálculo de las magnitudes en general; por eso estas dos palabras, análisis-álgebra se consideran a menudo como sinónimos (Novy, 1993, p. 274).

[2]El método de restricción del dominio es bastante usado en matemáticas. Vale la pena llamar la atención sobre el denominado *falso teorema* de Cauchy (1821), en el cual plantea que la suma arbitraria de funciones continuas es continua, y del cual existían algunos contraejemplos dados por Fourier. Abel intenta una salida al conflicto planteando que se considere la demostración con algunas excepciones.

Sin embargo la aparición de las curvas trascendentes plantea problemas que no pueden ser abordados de manera plena por los métodos del álgebra. El punto clave aquí es que no es posible definir estas funciones (circulares, logarítmicas, exponenciales, entre otras) con la sola intervención de las operaciones suma, resta, multiplicación, división y radicación; las únicas para las cuales se cuenta con algoritmos de cálculo. De manera más pragmática: dada una curva de naturaleza cualquiera, ya sea de índole algebraico o trascendente, es necesario desarrollar métodos que permitan caracterizar sus propiedades. Detrás de esos métodos existe un elemento común que los matemáticos intentaron eludir: el infinito. En este sentido el cálculo diferencial e integral no surge solo como una respuesta acertada para resolver problemas físicos, sino que responde a la necesidad de caracterizar y otorgarle ontología a estos objetos matemáticos nuevos[3]. Como lo mostraron Newton y Leibniz, los problemas de cómo calcular la tangente de una curva cualquiera en un punto, y cómo calcular el área bajo la curva (las cuadraturas) resultaron ser problemas subsidiarios el uno del otro.

Leibniz es importante para nuestra investigación por dos aspectos relevantes, en primer lugar por su programa de investigación que está enmarcado por su búsqueda filosófica de un método universal de conocimiento científico, la *característica general*, según él mismo lo expresara y que tuvo hondas repercusiones en Maurice Fréchet (1878-1973). No es casual que precisamente el epígrafe de la *Noticia*, Fréchet haga alusión a su programa generalizador (Fréchet, 1933, p. 27).

El segundo aspecto que nos llama la atención respecto de los trabajos de Leibniz, tiene que ver con el uso de las técnicas infinitesimales. Leibniz toma como referencia algunos métodos intuitivos para determinar la convergencia y la suma de algunas series, además del método de diferencias finitas, y los utiliza, en conjunto con el triangulo de Pascal, para el cálculo de áreas y el trazado de tangentes. El paso gradual de procesos finitos a los infinitos, le lleva a definir la diferenciación (trazado de tangentes) y la integración (cálculo de áreas), como operaciones inversas. Los pormenores del camino seguido por Leibniz escapan del objetivo de este trabajo, pero es importante precisar algunos aspectos de su proceso de generalización muy importantes para entender las concepciones epistemológicas que pudieron guiar a Fréchet en su propio programa.

Uno de los aspectos que nos interesa analizar tiene que ver con el proceso de generalización en matemáticas. En general la extensión es diferente a la generalización. Esta exige no sólo ampliar el dominio de aplicación sino caracterizar matemáticamente los objetos

[3]En este sentido el cálculo pretende dar soporte ontológico a la naturaleza y propiedades de las curvas tanto algebraicas como trascendentes. Algunas propiedades que permiten caracterizar las curvas son la continuidad, las rectas tangentes, las cuadraturas, etc.

matemáticos. Caracterización que consiste en la exhibición de propiedades de estos objetos. En el caso de la generalización del dominio de la curvas geométricas, es claro que no es suficiente con una definición declarativa; se hace necesario extender operaciones que es lícito hacer con curvas primitivas, como el cálculo de áreas o el trazado de tangentes. Para aclarar estos aspectos, observemos los siguientes ejemplos:

- La función $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ se puede transformar en $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Por ejemplo, $\widehat{f}(x) = f(x)$ si $x \in (0,1)$ y $\widehat{f}(x) = 0$ en otro caso. La función $\widehat{f}$ es una extensión de f, no una generalización.
- Por otro lado tenemos al conjunto de números que se usan para contar: $1, 2, 3, ...$ Este conjunto de números ($\mathbb{Z}^+$) se extiende primero con el 0 a los números naturales ($\mathbb{N}$) y luego por los números negativos para formar los números enteros ($\mathbb{Z}$). El ultimo conjunto puede generalizare en diversos grados; en particular, es un ejemplo de un anillo conmutativo con identidad. Otro ejemplo de dicho anillo es el anillo de polinomios en una variable sobre los enteros $\mathbb{Z}[x]$, que a su vez es una extension de los enteros. Pero no todos los casos de generalización deben ser pesados como una extensión; por ejemplo, el anillo *aritmética de reloj* $\mathbb{Z}_{12}$[4] no es una extensión de $\mathbb{Z}$.

Decimos entonces, que, en general, las nociones matemáticas se extienden y los resultados se generalizan. Es posible que se desee extender el campo de los números reales a los complejos (o hacer alguna extensión de campo), o puede ampliarse el dominio de definición de alguna función. La generalización es un resultado más general que contiene al resultado original como un caso especial. Si el resultado original no está incluido, no llamaríamos al nuevo resultado una generalización, sino un resultado análogo inspirado por el original. De manera similar, si una función nueva está de alguna manera inspirada en una función anterior pero no la *contiene*, preferimos llamarla una función inducida en lugar de una extensión.

Debemos notar que en el marco de la generalización de curvas, precisamente la búsqueda de Newton y Leibniz consistió en describir un método que permita incorporar estas operaciones y que hacen de la matemática algo mas que un simple juego sintáctico[5]. Es por

[4] Se denota $\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}12$ al conjunto cociente de $\mathbb{Z}$ por la relación de equivalencia *ser congruente módulo 12*. El conjunto $\mathbb{Z}_{12}$ con las operaciones suma y producto de clases de congruencias módulo 12, es un anillo conmutativo y unitario.

[5] En el caso de la generalización del dominio de curvas geométricas, es claro que no es suficiente con una definición declarativa; se hace necesario extender operaciones que es lícito hacer con las curvas primitivas, como el cálculo de áreas o trazado de tangentes.

ello que el proceso de generalización se constituye en un punto central en las concepciones de Fréchet, heredadas de su maestro Jacques Hadamard (1865-1963), en la definición de derivada en el análisis funcional, que lo diferencia de Vito Volterra (1860-1940) y que luego lo llevará a la creación y desarrollo del análisis general y a los espacios abstractos.

Para comprender esto es necesario entender el papel jugado históricamente por la derivada en la exhibición de propiedades ya no limitadas a las curvas geométricas y a las ecuaciones, sino a las funciones. La incorporación de las funciones de variable real constituye otro paso fundamental en la formación de un nuevo campo de las matemáticas como es el análisis. En adelante la cuestión será estudiar las propiedades de las funciones algebraicas y trascendentes. En lenguaje leibniziano, el problema se plantea en el sentido de encontrar la derivada. Como podemos notar se presenta un cambio relativo en cuanto al campo de definición y a la acción misma. Ahora los objetos son las funciones y la propiedad buscada es la derivada. Pero, habría que preguntarse cuál es la contribución de la derivada en la caracterización de las funciones. En otras palabras, si el objeto función se construye o se identifica en la dinámica de exhibir sus propiedades, ¿cuál es el papel de la derivada?

En este sentido es necesario hacer un balance que nos evidenciar la dinámica que lleva a Fréchet a precisar las características que identifican la derivada.

Si nos ubicamos en el contexto histórico del problema, vemos que del tratamiento algebraico de curvas geométricas fácilmente se llega a la caraterización de las funciones polinómicas. En lenguaje geométrico: se cuenta con procesos para el trazado de tangentes y del cálculo del área bajo tales curvas. En el nuevo lenguaje del análisis: se dispone de algoritmos efectivos para el cálculo de derivadas e integrales de polinomios. El problema se presenta para las funciones trascendentes, en las cuales los procesos algebraicos no responden a las exigencias requeridas. La cuestión tiene características similares al problema de la instauración del estatus de número de los irracionales. Sabemos que no basta decir que en la solución de ecuaciones surge la necesidad de extender el dominio numérico. Por ejemplo $\sqrt{3}$ no se identifica como número automáticamente del hecho de ser solución de la ecuación $x^2-3=0$. Es necesario exhibir tal objeto, a través de propiedades que permitan identificarlo como número. La dificultad de fondo, es que no existe una forma de exhibición completa por que su representación decimal es infinita y no periódica. Sólo la incorporación del infinito actual hace posible la caracterización completa, no sólo de raíces sino también de números más complicados como π, e y el resto de números trascendentes. Este ejemplo nos permite relacionar el caso de las funciones con la cuestión de la representación de los números irracionales. Sabemos que no es posible conocer a cabalidad todas las cifras decimales. Pero decimos que los tenemos bien determinados cuando podemos escribirlo con tantas cifras decimales como queramos; es decir, tan aproximado como se quiera. Con las funciones trascendentes pasa algo similar: al no poderlas caracterizar completamente, buscamos acercarnos a ellas a través de aproximaciones por vecindades de puntos específicos a su recta tangente. Como se ve el concepto central en esta caracterización es el de derivada. Precisamente esta es la óptica de Fréchet que lo diferencia de Volterra.

Todo lo anterior permite entender los esfuerzos de matemáticos como Joseph Luis Lagrange (1736-1813) y Brook Taylor (1685-1731) al intentar representar las funciones a través de series de potencias. Precisamente el desarrollo en series de Taylor es un teorema que enmarca el problema de la representación de funciones. El problema ahora no es el de calcular derivadas, se trata de representar funciones en el entorno de un número real o complejo. En otras palabras se pretende aproximar la curva en una vecindad. Para esta aproximación es conveniente la utilización de la curva más simple, la línea recta. De manera análoga, la extensión a funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, es el plano tangente que, en general, se convierte en una transformación lineal cuando de trata de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

El surgimiento del análisis funcional se enmarca en la perspectiva de generalización que hemos esbozado. En primer lugar, involucra la generalización de funciones cuya variable independiente ya no es un número o un vector sino que es otra función, como se usa en los problemas típicos del cálculo de variaciones. El mismo Fréchet ubica este cálculo como un capítulo del análisis funcional (Fréchet, 1912, p. 385).

Sin embargo, como hemos dicho antes, las primeras generalizaciones de la noción de derivada se deben al matemático italiano Vito Volterra, cuyos trabajos difieren sustancialmente de los de Fréchet (Volterra, 1887). El punto de la polémica que enfrentó epistolarmente a estos dos matemáticos apunta precisamente a la forma como concebían el proceso de generalización en matemáticas. La crítica fuerte de Fréchet tiene que ver, en principio, con la manera de identificar los nuevos objetos matemáticos denominados funcionales (Fréchet, 1958), en esta dirección Fréchet afirma:

> La teoría clásica de funciones presenta el mismo problema para funciones de una variable. De aquí a buscar si existen métodos comunes que permitan resolver el mismo problema, no esta lejos. Sin embargo se puede llegar allí de varias maneras. El método clásico, debido a Lagrange, no consiste en tratar las funciones lineales de manera análoga a las funciones numéricas, sino pasar por el intermedio de funciones que calculadas para una familia lineal con un parámetro. Es también el método adoptado por Voltera para las funciones lineales más generales que estudia el análisis funcional[6].

Efectivamente el método utilizado por Volterra en su generalización apunta en este sentido. Estudiaremos como esta situación se presenta en todo su artículo de 1887, en el cual introduce la noción de derivada (Volterra, 1887a).

[6] Fréchet, M. (1955): *Les Mathématiques et le Concret.* Paris, PUF. Existe traducción de esta obra EN: Fréchet, Maurice, (1958) *Las Matemáticas y lo Concreto.* Universidad Nacional Autónoma de México Colección "Problemas Científicos y Filosóficos" de la Universidad Nacional Autónoma de México, dirigida por Guillermo Haro, Amuel Ramos y Eli de Gortari (coordinador). Esta version corresponde a la primera edición en español de la obra de Fréchet, publicada en francés en 1955.

Capítulo 2

La noción de derivada en Vito Volterra

Este capítulo se refiere a un aspecto muy específico de la relación entre los matemáticos italianos en el periodo de cambio entre los siglos XIX y XX, y se centra en la forma en que Vito Volterra (1860-1940) concibe las matemáticas y su relación con la naturaleza de los objetos matemáticos, tomando como referencia el caso especifico de definir la derivada sobre un conjunto de curvas. Esta figura emblemática del medio científico italiano ha sido estudiada ampliamente en sus dos biografías principales *The Volterra Chronicles: The Life and Times of an Extraordinary Mathematician* (Goodstein, 2007) y en *Vito Volterra* (Guerraggio, 2010). La omnipresencia de las obras de este matemático en la escena científica italiana dan cuenta del quehacer científico, y aún más generalmente del pensamiento intelectual en las décadas siguientes a la unificación italiana. Nacido en el momento en que la península italiana logra unidad política, en Vito Volterra se sintetizan las aspiraciones y transformaciones de una nueva nación que reclamaba su lugar en el mundo de la ciencia europea.

2.1. La escuela italiana

Generalmente se reconoce que los orígenes del análisis funcional pueden ser rastreados en la Italia del siglo XIX, periodo en el cual surge un fuerte movimiento alrededor de ciertos campos de la ciencia como lo son la geometría, la física y el análisis matemático. En una primera etapa aparecen los geómetras Enrico Betti (1823-1892) y Eugenio Beltrami (1835-1900). Betti por su parte se interesaba por la investigación en problemas de la física matemática, en particular en la teoría del potencial y elasticidad; también realizó contribuciones significativas a la topología algebraica, al estudio de funciones elípticas y a la variable compleja.

En sus investigaciones Beltrami trabajó especialmente en problemas ligados a la geometría diferencial Riemanniana. Beltrami publicó su ensayo sobre la interpretación de la geometría no euclídea, que proporcionó un modelo euclideano de la geometría no-euclidiana de Lobatchevsky a través de una curva llamada tractriz. Una de las propiedades de esta curva es que la longitud del segmento de la tangente comprendido entre el punto de tangencia y el punto de corte con el eje OY es constante. El eje OY es una asíntota. Por tanto la pseudoesfera es una superficie de revolución, que engendra una curva llamada tractriz, cuya ecuación es

$$y = \pm \left[\sqrt{a^2 - x^2} - a \, \log \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right],$$

siendo a una constante. Cabe destacar que al variar la constante a se obtiene una infinidad de superficies pseudoesféricas.

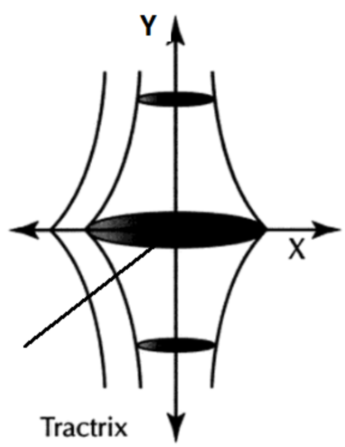

Figura 2.1: Pseudoesfera

Beltrami hizo notar que la geometría intrínseca de la pseudoesfera coincide con la geometría sobre parte del plano de Lobatchevsky. Así, esta geometría no euclidiana tiene un soporte euclideano: no es más que una exposición abstracta de la geometría euclideana sobre la pseudoesfera. La investigación de Beltrami se puede ubicar dentro de lo que modernamente se conoce como geometría diferencial y la física matemática.

Por otro lado, en el campo del análisis matemático aparecen los notables analistas como

Guido Ascoli (1887-1957), Cesare Arzelá (1847-1912), Ulisse Dinni (1845-1918), Giuseppe Peano (1858-1932), Salvatore Pincherle (1853-1936) y Vito Volterra. El líder de este movimiento fue Ullisse Dini, quien se graduó con una tesis sobre geometría diferencial bajo la tutoría de Enrico Betti. Podemos rastrear varios aportes al análisis matemático por parte de Dini, tales como la demostración del teorema de la función implícita y la definición de un tipo de derivada, en la cual el paso habitual al límite se generaliza a través de la noción de límites superiores o inferiores. También merecen mención sus estudios sobre series numéricas y trigonométricas, funciones de variables complejas y ecuaciones diferenciales. Pero el mayor aporte que tuvo Dini en el medio, no solo italiano, sino global fue la publicación de su monografía en el año de 1878 *Fundamentos de la teoría de funciones de variable real*, en la cual desarrolló su programa de rigorización. El objetivo de este programa no era el de descubrir nuevos resultados, sino situar a los ya conocidos en fundamentos más sólidos, completándolos y especificando el dominio de su validez.

Pincherle es considerado como otro pionero del análisis funcional debido a sus contribuciones en el campo de las funciones analíticas. Pincherle observó que cada función que pertenece a esta clase puede ser caracterizada a partir de una infinidad contable de parámetros que podrían interpretarse como sus coordenadas; esto lo llevó a investigar funciones de espacios de dimensión infinita y al estudio abstracto de las funcionales lineales que actúan sobre estos espacios. Trató de crear un cálculo para estos funcionales similar al ya bien conocido para las funciones de una variable compleja. Estos conceptos fueron desarrollados décadas después a lo largo de diferentes caminos y corrientes de pensamiento, pero la ruta que tomó Pincherle, permeado por las ideas Karl Weierstrass (1815-1897), se centró en estudiar aspectos menos fértiles del análisis funcional y no profundizó en los aspectos que actualmente se consideran mas interesantes para este campo de las matemáticas. Por ejemplo Pincherle se situó en un contexto bastante general utilizando, espacios lineales de dimensión infinita. En este sentido su trabajo era bastante inusual para su época ya que el uso de la teoría axiomática para la dimensión infinita no fue investigado sino hasta 1920; sin embargo su trabajo tuvo muy poca influencia en el desarrollo de lo que se convertiría en análisis funcional. Las razones de esta falta de influencia se deben en parte al hecho de que un enfoque axiomático tan general y formal, como lo propone Pincherle, no cumplía con las preocupaciones de la mayoría de los matemáticos de los primeros años del siglo XX. Aunque no se puede desconocer el enorme aporte de Pincherle al análisis funcional como el desarrollo de cálculo fraccional con la definición de la derivación de cualquier orden no necesariamente entero.

Giuseppe Peano, fue otro protagonista en este movimiento rigorista del análisis matemático. Su contribución fue la de haber presentando los axiomas de la aritmética y la de obtener de manera precisa la formulación de nociones básicas en el análisis como lo son el límite, el área de una región, la formula de Taylor, la derivada y los máximos y mínimos para funciones de varias variables, entre otros. La importancia de su trabajo tiene relación con la axiomatización de las teorías matemáticas. Su definición no recursiva de la derivada de orden n actualmente se usa en algunas investigaciones en análisis y en optimización no suave. Contribuyó, a finales de la década de 1880, en la solución del problema de Cauchy, en el cual se pretende garantizar la existencia de una solución a la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$; esta propiedad la demostró usando sólo la hipótesis de que la función f sea continua. Entre sus contribuciones se destacan la elaboración de un sistema de axiomas para espacios vectoriales y la construcción de la llamada curva de Peano[1], la cual sigue siendo una de las conclusiones más sorprendentes y menos intuitivas que el rigor deductivo ha llevado a establecer y que ha desempeñado un papel realmente significativo en la historia del concepto de dimensión.

A finales del siglo XIX los matemáticos Ascoli y Arzelá procedieron a estudiar separadamente los conjuntos infinitos de funciones o de curvas. Para ello se basaron en el hecho de que en los planteamientos conjuntistas de Georg Cantor (1845 - 1918) no se hace referencia a la naturaleza de los conjuntos. Bien pueden ser puntos de $\mathbb{R}^n$ o de naturaleza cualquiera que se forman de acuerdo a sus procedimientos.

Ascoli analiza por un lado conjuntos K de funciones $y = f(x)$, continuas en un intervalo $[a, b]$. Como primera definición referente a tales conjuntos, interviene noción de equicontinuidad que posteriormente será importante en la teoría de funciones y el análisis funcional.

Definición de equicontinuidad. Sea $C(I; \mathbb{R}^N)$ el conjunto de funciones continuas de un intervalo I de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$. Se dice que $\mathcal{F} \subseteq C(I; \mathbb{R}^N)$ es equicontinua en I si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, que sólo depende de ϵ, tal que si x_1 y x_2 pertenecen a I y satisfacen $|x_1 - x_2| \leq \delta$, entonces necesariamente $|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| \leq \epsilon$, para toda $\Phi \in \mathcal{F}$.

Ascoli, al introducir la definición de equicontinuidad demuestra que si el conjunto K de curvas o funciones continuas satisfacen la definición de equicontinuidad, entonces de este

[1]La curva de Peano es una curva definida por dos funciones continuas $x = f(t), y = g(t)$ que pasa por todos los puntos del cuadrado unidad, mientras que t varia en el intervalo $[0, 1]$.

conjunto es posibles extraer una subsucesión de elementos que converja uniformente a cierto elemento de dicho conjunto. El resultado anterior es conocido como el teorema de Ascoli y con ello se obtiene lo que modernamente se conoce como la propiedad de compacidad del conjunto infinito K de elementos del espacio $C[a, b]$, el cual es considerado como uno de los resultados centrales del moderno análisis funcional. De manera mas precisa,

Teorema de Arzelá-Ascoli. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas definidas en D. Si $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente acotada y equicontinua en D, entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que converge a una función $f \in C(D; \mathbb{R})$.

La demostración del teorema anterior pasa por garantizar primero que la cerradura de $\{f_n\}$ es compacta, por lo tanto el teorema sería entonces una consecuencia del teorema de Bolzano-Weierstrass.

Arzelá, fue un matemático que debido a su formación académica tenía mas elementos que Ascoli para encarar problemas matemáticos. Arzelá estaba particularmente interesado en la investigación sobre la teoría de conjuntos de funciones y la teoría de las series de funciones provenientes de los problemas del cálculo de variaciones. Aunque las funciones discontinuas eran conocidas por la comunidad matemática de la época, solo se hacían investigaciones profundas en el campo de las funciones continuas. Arzelá define un nuevo tipo de convergencia en 1899 denominada convergencia por segmentos, demostrando que este tipo de convergencia era condición necesaria y suficiente para la continuidad de las función límite, este tipo de convergencia es llamada también convergencia cuasi uniforme.

Los resultados de Ascoli y de Arzelá llevan a la definición de lo que actualmente se conoce como compacidad. Fruto de ello surge el teorema de compacidad o teorema de Ascoli-Arzelá, publicado en 1883, que es probablemente el primer teorema de análisis funcional del cual se tiene registro. Este teorema indica que si se tiene una sucesión de funciones $(f_n)_n$, definidas en el intervalo $[0, 1]$ uniformemente acotadas[2] y equicontinuas en $[0, 1]$, entonces $(f_n)_n$ contiene una subsucesión uniformemente convergente. Este teorema esencialmente es una generalización del teorema de Bolzano-Weierstrass en el espacio infinito dimensional de funciones $C[a, b]$. En realidad este teorema permite caracterizar la compacidad de conjuntos no necesariamente de puntos.

[2]Sea E un espacio métrico. $\mathcal{F}$ una familia de funciones de funciones de E en $\mathbb{R}$. Se dice que $\mathcal{F}$ uniformemente acotada se $\exists M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ $\forall x \in E$ y toda $f \in \mathcal{F}$. (Recalde, 2018)

Como ejemplo, mostremos que la familia de funciones $\{f_n\}$ en $C([0,1],\mathbb{R})$ tal que $|f_n'(x)| < x^{-1/2}$, $x \in [0,1]$ y $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$, tiene una subsucesión que converge uniformemente en $[0,1]$. Para ello basta demostrar que con las condiciones dadas se cumplen las hipótesis del teorema de Arzelá-Ascoli.

1. Veamos que es equicontinua.
   Para $x, y \in [0,1]$, con $x < y$, se tiene:
   $$|f_n(x) - f_n(y)| = |\int\limits_x^y f_n'(t)\,dt| \leq |\int\limits_x^y t^{-1/2}\,dt| = 2(\sqrt{y} - \sqrt{x})$$
   Como la función $F(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua en $[0,1]$, entonces para $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon/2$.

2. Veamos que es uniformemente acotada.
   Como $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 0$, entonces f_n no puede ser solo mayor que cero o solo menor que cero en $[0,1]$. Entonces existe $x_0 \in [0,1]$, tal que $f(x_0)$, por lo tanto:
   $$|f_n(x)| \leq 2(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \leq 2, \text{ para todo } x \in [0,1].$$

Volterra, es quizás el matemático italiano que mas influyó en el desarrollo del análisis funcional durante mucho tiempo. Volterra fue estudiante de Dini, quien lo interesó en la teoría de funciones reales que por esa época estaba en desarrollo en la Italia del siglo XIX; estuvo tan permeado por las concepciones de su maestro que a los 21 años resolvió dos problemas que le había planteado Dini; el primero fue el de construir un conjunto denso de contenido externo positivo y el segundo fue el de hallar una función con derivada acotada pero que no fuese Riemann integrable[3].

En su primer artículo de análisis funcional (Volterra, 1887) y en los artículos posteriores, Volterra estudia una clase de funciones especiales, las "funciones que dependen de otras funciones", que en 1904 las llamará funciones de líneas para evitar confusiones; es decir,

[3] La construcción de la función que realizó Volterra se basa esencialmente en la función f dada por $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, cuya derivada está dada por $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ y $f'(0) = 0$. Si se mira superficialmente la construcción de esta función, puede quedar la impresión de que la no integrabilidad de la derivada se debe a que la función en la cual se basa esa construcción, oscila infinitas veces alrededor del origen.

Volterra trabaja con funciones continuas $X \to \mathbb{R}$, donde X es un conjunto de curvas continuas en $[a, b]$ con rango en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$.

En estos artículos Volterra pretendía aclarar los conceptos que el creía necesarios para ampliar la teoría de Riemann sobre las funciones de variable compleja[4]. Dado que Volterra, influenciado por los movimientos de la época no solo en Italia sino en Alemania, se ve motivado a escribir lo que se considera el primer tratado de funcionales, es por eso que es preciso estudiar los tratamientos y concepciones de Volterra frente a este nuevo campo de acción.

Volterra es consciente de que una generalización del concepto de derivada, que permita resolver los problemas planteados por sus antecesores, es imposible en la vía del análisis clásico y desde su interior. Así, tal como su concepción sobre la actividad matemática se lo impone, regresa al origen del problema y a su solución desde la geometría, para luego generalizarla mediante el concepto de variación de una función de línea. De acuerdo al análisis desarrollado en esta sesión, damos sustento al diagrama descrito en el Anexo I en el cual se presentan las interrelaciones entre los matemáticos que precedieron a Volterra y los trabajos que Volterra tomó como insumos para poder llegar a la definición de derivada para funciones de línea (ver Anexo I).

2.2. Sobre la extensión de la noción de función

Uno de los polos de desarrollo de de las matemáticas del siglo XIX tuvo relación con la definición de función dada por Peter Gustav Lejenue Dirichlet (1805-1859) en el año de 1837:

> Si una variable y esta relacionada con una variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de la variable y, entonces y sera llamada función de la variable independiente x (Kleiner, 1989, p.282) [5].

[4]Aquí podemos observar la influencia de Riemann y Betti en las investigaciones de Volterra, dado que Betti y Riemann eran amigos y Volterra fue alumno de Beti en Pisa.

[5]En esta definición se evidencia que Dirichlet asume el objeto función como una correspondencia no necesariamente analítica entre variables, se infiere que el dominio y codominio se restringe al conjunto de los números reales y no se refiere a conjuntos abstractos como se asume modernamente.

Volterra es usuario de esta definición y mediante un breve análisis desde el punto de vista de los problemas físicos, manifiesta que el concepto de función se puede extender de manera natural[6]. De esta forma, empleando la terminología de *funciones que dependen de otras funciones*, Volterra aísla el concepto general y empieza a sistematizar lo que modernamente se conoce como funcionales, que, conscientemente o de manera desapercibida, la comunidad matemática había venido trabajando en el análisis clásico[7]. Volterra afirmaría lo siguiente:

> Me di cuenta de la necesidad de considerar las funciones de líneas porque muchos fenómenos naturales conducen al estudio de las cantidades que dependen de un número infinito de variables. Muchos Problemas de análisis también conducen a las mismas cantidades (Volterra, 1921).

Volterra considera que por lo general la funcional $y[\varphi(x)]$ está definida solamente cuando $\varphi(x)$ debe variar en las formas de una clase de funciones preestablecidas. Las de mayor interés para Volterra son las funciones analíticas, o la clase de todas las funciones continuas. En este sentido Volterra utiliza las técnicas del álgebra y del análisis clásico para generalizar las situaciones correspondientes a las funcionales; dichas técnicas, fundamentalmente se encargan de sustituir las sumas finitas en que el índice o la variable independiente t varía entre los números enteros $1, 2, ..., n$, por integrales definidas en donde el índice o la variable independiente t varia en un intervalo (A, B), en donde $f(t)$ y $g(t)$ son continuas[8]. Justamente Volterra afirma que el nuevo cálculo funcional pasa por la caracterización del paso de lo finito a lo infinito, teniendo en cuenta que una de las mayores dificultades que se podrían encontrar son las asociadas a la justificación del paso al límite. De este modo Volterra muestra que el estudio de este nuevo campo tiene interés no solo en los problemas de aplicación al mundo concreto, sino que además evidencia las aplicaciones internas dentro de las matemáticas mismas, De hecho, una de las motivaciones iniciales fue que esperaba ser capaz de aplicar la nueva teoría con éxito a algunos estudios de análisis complejo:

[6]Volterra evidencia que para resolver problemas de física y mecánica, así como en la integración de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se deben considerar cantidades que dependen de todos los valores que una o mas variables toman en un intervalo.

[7]Un ejemplo de tales funcionales es la integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, para toda función $f \in C^1[a, b]$

[8]En este paso de lo finito a lo infinito se reemplazaría $\sum\limits_{t=1}^{n} f(t)g(t)$ por $\int\limits_A^B f(t)g(t)$

> Me permito mencionar en este documento algunas de las consideraciones que sirven para aclarar los conceptos que creo que es necesario introducir para extender la teoría de Riemann sobre funciones de variables complejas, que creo que se puede utilizar con ventaja en otros proyectos de investigación (Volterra, 1887).

Uno de los problemas que demostró Henri Poincaré (1854-1912) en el el año de 1887 fue el de probar la generalización del teorema de Cauchy[9] y a propósito de eso, Volterra advierte[10]:

> Poincaré, en la generalización del teorema de Cauchy, ha demostrado que la integral de una función uniforme de dos variables imaginarias tomadas sobre una superficie cerrada es cero. Se puede inferir de esto que, cuando la superficie de integración no es cerrada, la integral depende de las líneas que forman el contorno de la superficie. Así vemos que la integración de funciones de dos variables conduce a las funciones de las líneas (Volterra, 1889).

De esta manera, Volterra, desde las motivaciones internas a la matemáticas y por supuesto desde las motivaciones externas a ella, ha extendido el concepto de función, introduciendo el nuevo concepto de funcional. Los matemáticos de la época no fueron esquivos a este nuevo campo del conocimiento; al respecto Hadamard escribió:

> Mucho más sorprendente es el destino de la extensión dada a esa concepción inicial en la última parte del siglo XIX, principalmente bajo el poderoso impulso de Volterra. Por qué fue el gran geómetra italiano que condujo a trabajar en funciones de la misma manera en que el cálculo infinitesimal había trabajado en números, es decir, ¿considerar una función como un Elemento continuamente variable? Sólo porque se dio cuenta de que se trataba de una forma armoniosa de completar la arquitectura del edificio matemático, como el arquitecto ve que el edificio estaría mejor equilibrado por la adición de un nuevo ala (Hadamard, 1954, p. 129).

[9]Poincare demuestra que la integral de una función uniforme de dos variables complejas tomadas en una superficie cerrada es cero, si se puede distorsionar y reducir la superficie hasta un punto sin encontrar alguna singularidad.

[10]Cabe anotar que Poincaré publica este aríiculo el mismo año en el que Volterra “inventa” la teoría de las funcionales.

2.3. La derivada de Volterra en espacios de curvas

En su obra *Sobre las funciones que dependen de otras funciones* (1887), Volterra inicia presentando, de forma panorámica, la notación que va a utilizar y algunas definiciones generales:

> Cuando una cantidad y depende de los valores de una función $\varphi(x)$ definida en cierto intervalo $(A..B)$, se dirá que y depende de $\varphi(x)$ entre $(A..B)$ y ello se representa por:
>
> $$y = y[\overset{\mathrm{B}}{\underset{\mathrm{A}}{\varphi(x)}}]$$
>
> o simplemente por,
>
> $$y = y[\varphi(x)].$$

A continuación Volterra define la continuidad para esta nueva clase de objetos de la siguiente manera:

> Sea $y = y[\varphi(x)]$, diremos que y es continua, si al dar a $\varphi(x)$ una variación $\psi(x)$ tal que en valor absoluto $\psi(x)$ siempre es menor que σ, la variación correspondiente a y puede hacerse inferior a ϵ , pequeño y arbitrario[11].

Simbólicamente se escribe de la siguiente manera

$$|\Delta y| = |y[\varphi(x) + \psi(x)] - y[\varphi(x)]| < \epsilon$$

donde $\psi(x)$ satisface $|\psi(x)| < \sigma$.

Note que la de longitud de una curva en el plano es un caso especial de una funcional que no es continua de acuerdo a la definición de Volterra. En efecto, sea $\varphi_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función identidad en el intervalo $[0,1]$ cuya gráfica es la diagonal del cuadrado unidad; sea $\varphi_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida en $[0,1]$ cuya gráfica esta compuesta por segmentos que unen a los puntos $(0,0)$, $(1/2,1/2)$ y $(1,0)$ y sea $\varphi_3 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en $[0,1]$ cuya

[11] Hay que destacar aquí el alcance de esta declaración, la cual no produce una generalidad que sólo llegará más tarde. Los términos de Volterra están destinados a definir la continuidad de la funcional en el caso de las funciones continuas en el intervalo $[a,b]$. En otras palabras, el conjunto de las funciones continuas no debe ser pensado aquí como un arquetipo de un espacio abstracto más general.

gráfica esta compuesta por segmentos que unen a los puntos $(0,0)$, $(1/4,1/4)$, $(1/2,0)$ y $(1/2,0)$, $(3/4,1/4)$, $(1,0)$ (ver figura 2.2).

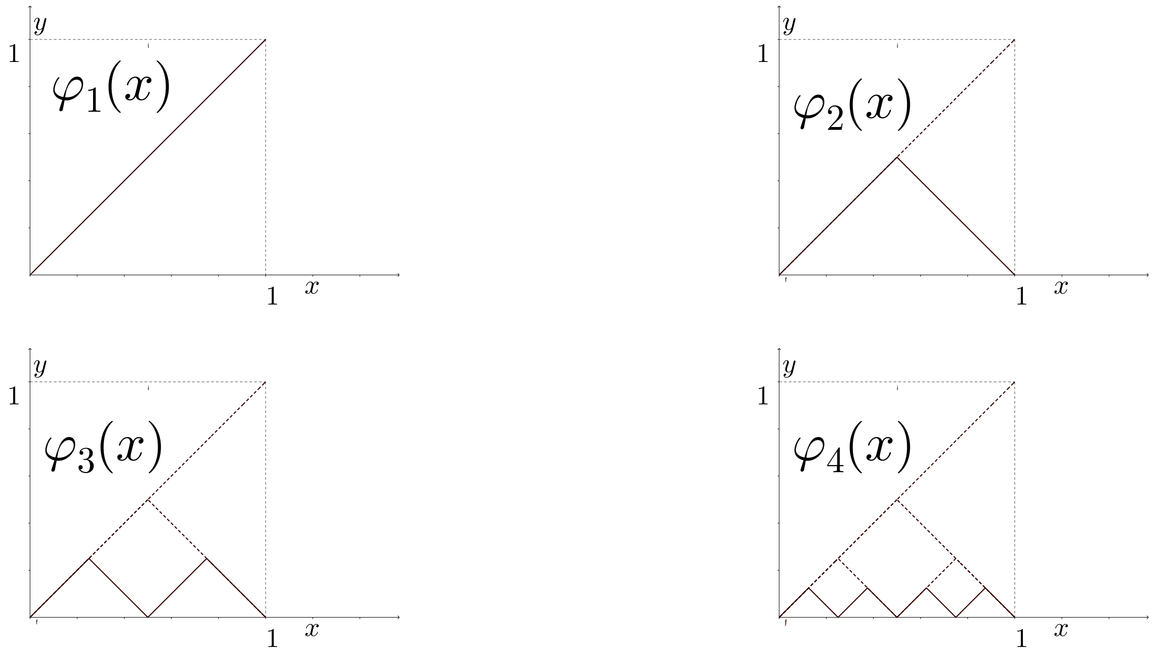

Figura 2.2: Función no continua según Volterra.

El proceso de dividir por la mitad los lados de los triángulos puede prolongarse indefinidamente y se obtiene una sucesión de funciones $\varphi_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que para todo $x \in [0,1]$ se cumple que $0 \leq \varphi_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. De otro lado, la longitud de la curva $y[\varphi_n(x)] = \sqrt{2}$ para todo índice $n \in \mathbb{N}$ y además satisface que las funciones $\varphi_n(x)$ convergen a la función $f(x) = 0$, es decir $|0 - \varphi_n(x)| = |\varphi_n(x)| < \dfrac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$, para todo $x \in [0,1]$ y para $n > 1 + \log_2(1/\epsilon)$. Por lo tanto se tiene que y no es continua según la definición de Volterra pues $|\varphi_n(x)| < \sigma$, para σ pequeño y arbitrario, pero $\Delta y = |y[\varphi(x) + \varphi_n(x)] - y[\varphi(x)]| \geq \epsilon$. Es decir, se tiene una familia de funciones que convergen a $f(x) = 0$, pero la diferencia entre las longitudes de las funciones y la función $f(x) = 0$ no hace tan pequeña como se desee.

De manera general podemos decir que Volterra usa por analogía los métodos del análisis clásico para extender el concepto de derivada a los nuevos objetos matemáticos que ha definido. Su método esencialmente sigue dos pasos. Sea la función que depende de otra función $y[\varphi(x)]$, donde $\varphi(x)$ esta definida en el intervalo $[A, B]$[12]. Tomando un punto $t \in (A, B)$ y un entorno (m, n) de t, contenido en el intervalo $[A, B]$, Volterra estudia la variación de y en ese entorno, a partir de la variación de $\varphi(x)$. Luego toma el límite cuando la longitud del entorno tiende a cero. Esto puede interpretarse como un movimiento vertical de la variación. A continuación Volterra incorpora las variaciones de todos los puntos del intervalo $[A, B]$ y a través de la integral encuentra la variación de la función que depende de otra función $y[\varphi(x)]$ en todo el intervalo. Podemos, igualmente, interpretar este procedimiento como un movimiento horizontal. La variación en el sentido vertical se denota por:

$$\delta y = y[\varphi(x) + \theta(x)] - y[\varphi(x)],$$

donde $\theta(x)$ es la variación que se hace a la función $\varphi(x)$ en el intervalo (m, n).

La variación horizontal, es decir la variación en la totalidad del intervalo (A, B) se denota por:

$$\Delta y = y[\varphi(x) + \varepsilon\psi(x)] - y[\varphi(x)],$$

que posteriormente dará lugar a la derivada.

Como se puede observar, para Volterra la variación de la funcional y depende de la variación del dominio de $\varphi(x)$, en una especie de extensión a partir de las funciones de una variable. La variación no es propiamente de la funcional, sino del dominio de la función variable. No es una función sino una variación de la función variable. En otras palabras, Voltera no se desprende de las las características peculiares que definen la funcional y por eso tiene que apoyarse en las variaciones del dominio de la función variable.

En seguida, Volterra impone algunas condiciones necesarias para lograr su definición[13]. En primer lugar y en conformidad con los teoremas clásicos, parte de la continuidad de y, e impone sucesivas condiciones que le permitan bordear los obstáculos a su definición

[12] Volterra no especifica si es cerrado o abierto. Para evitar problemas con los límites, aquí se considerará cerrado.

[13] Es necesario anotar que sigue todos los pasos de la definición del análisis clásico atendiendo primero a al variación de la variable independiente.

extendida.

En el primer movimiento[14] toma un intervalo $h = mn$ [15] dentro del intervalo $[A, B]$, en el cual $\varphi(x)$ tiene una variación continua $\theta(x)$ en h, tal que $|\theta(x)| < \epsilon$. Tomando,

$$\delta y = y[\varphi(x) + \theta(x)] - y[\varphi(x)],$$

se convienen las siguientes condiciones:

C1. La relación $\dfrac{\delta y}{\epsilon h}$ es siempre menor que un número finito M.

C2. $\theta(x)$ es siempre del mismo signo y se define,

$$\sigma = \int_m^n \theta(x)\, dx.$$

Si se representa la función $\varphi(x)$ mediante una curva $z = \varphi(x)$, tendremos que σ será el área comprendida entre esta curva y la curva variada.

Winter (1913) en su artículo *Les principes du calcul fonctionnel*, representa esta situación en la figura 1, para ello toma $AMENB$ la cual representa la línea $\varphi(x)$. Supongamos que esta línea sufre una deformación ME_tN en el intervalo $[c, d]$. Ello genera una nueva línea $\varphi_1(x)$, la cual está representada por AME_tNB. Entonces, se tendrá:

$$\sigma = \int_c^d [\varphi_1(x) - \varphi(x)]\, dx.$$

A continuación Volterra impone la condición de la existencia del límite de $\delta y/\sigma$ cuando ϵ y h decrecen, teniendo la precaución de que este intervalo contenga a t. Además, se admite la siguiente condición:

[14] Movimiento llamado aquí vertical.

[15] Volterra usa la misma h tanto para identificar el intervalo (m, n) que simboliza por mn, como la longitud del mismo intervalo.

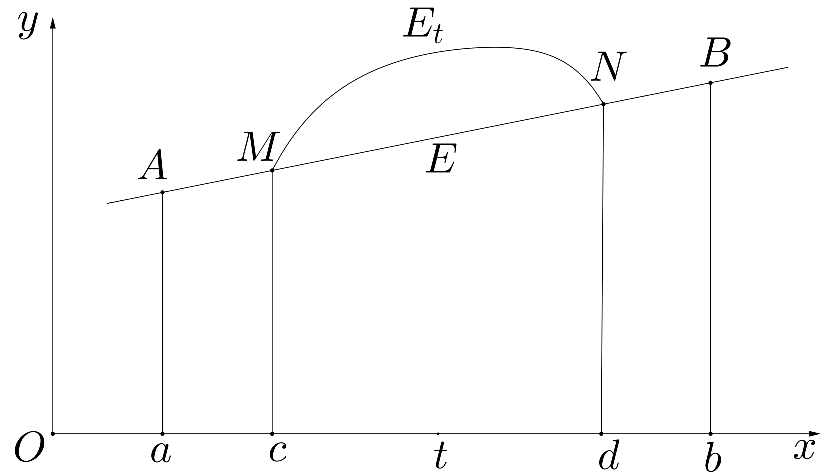

Figura 2.3: Representación de σ

C3. La relación $\delta y/\sigma$ debe tender a su límite uniforme con respecto a todas las posibles funciones $\varphi(x)$ y a todos los índices t.

El límite $\delta y/\sigma$ dependerá de $\varphi(x)$ y del punto t; Volterra lo denota por:

$$y'|[\varphi(x), t]|.$$

Este límite es la derivada primera de y.

C4. El límite anterior es una función continua con respecto a $\varphi(x)$ y t.

Como se observa, Volterra ha procedido en lo anterior, mediante un movimiento de variación vertical, fijando un punto t del dominio de $\varphi(x)$.

A continuación procede a realizar el movimiento en sentido horizontal. Para ello somete a $\varphi(x)$ a una variación continua, pero ahora en todo el intervalo AB, variación que se denota con $\varepsilon\psi(x)$. De esta forma, la variación de y en el intervalo AB estará dada por:

$$\Delta y = y[\varphi(x) + \varepsilon\psi(x)] - y[\varphi(x)],$$

Haciendo variar ε se puede considerar Δy como función de ε [16]. Para Volterra, la derivada

[16]Claramente esta manera de *generar las funciones variables* a partir del parámetro ε evidencia las concepciones de Volterra arraigadas del análisis clásico, es decir la dependencia del parámetro hace que nos amarremos a tratar $\varphi(x)$ como una variación en si misma en lugar de tratarla como un punto que varia.

se logra al calcular

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta y}{\varepsilon}$$

o

$$\left(\frac{dy}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}.$$

el cual se calcula de la siguiente manera

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon} \Delta y \right)_{\varepsilon=0}.$$

Veamos como calcula Volterra este límite.

Se parte del hecho que $\psi(x)$ no es constantemente cero en todo el intervalo AB. Volterra supone que el número de puntos en los cuales $\psi(x)$ se anula, es finito. Al rededor de cada uno de esos puntos se construyen intervalos cuya suma de longitudes puede hacerse menor que un número $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño. Se subdivide la parte restante del intervalo AB en los subintervalos $h_1, h_2, ...h_n$.

Es de anotar que en cada uno de estos subintervalos, $\psi(x)$ conserva siempre el mismo signo[17]. Se divide cada intervalo $h_i = E_iF_i$ en tres partes k_i, l_i, m_i, y se define la función $\theta_i(x)$ continua y siempre del mismo signo, la cual se anula en los intervalos AE_i y F_iB y es igual a $\psi(x)$ en el interior del intervalo l_i y en lo dos intervalos adyacentes k_i y m_i sea siempre creciente o decreciente.

Se define

$$\psi(x) - \sum_{i}^{n} \theta_i(x) = \alpha(x)$$

A continuación Volterra toma:

$$\sum_{i}^{n} k_i + \sum_{i}^{n} m_i < \delta$$

[17]Esto se puede garantizar por el teorema del valor intermedio.

La suma de los intervalos en los cuales $\alpha(x)$ es distinta de cero sera inferior a 2δ. A continuación Volterra enuncia el siguiente teorema.

Teorema. Si P es el máximo en valor absoluto de $\psi(x)$, entonces se cumple la siguiente desigualdad

$$y[\varphi(x)+\varepsilon\psi(x)] - y[\varphi(x)+\varepsilon\sum_{i}^{n}\theta_i(x)] < 2\delta M P\varepsilon. \tag{2.1}$$

A continuación realizaremos la demostración de este teorema, ya que Volterra no presenta demostración alguna de este resultado.

Demostración. Sea

$$\delta y = y[\underbrace{\varphi(x)+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\theta_i(x)}_{f(x)} + \varepsilon\alpha(x)] - y[\underbrace{\varphi(x)+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\theta_i(x)}_{f(x)}] \tag{2.2}$$

Tenemos que $\varepsilon\alpha(x)$ es la variación de $f(x)$ y es continua porque

$$\alpha(x) = \underbrace{\psi(x)}_{continua} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\theta_i(x)}_{continua}$$

Además porque siendo,

$$|\alpha(x)| = |\psi(x) - \sum_{i=1}^{n}\theta_i(x)| < |\psi(x)| < P,$$

cumple la condición C1:

$$|\varepsilon\alpha(x)| < \varepsilon P.$$

Asi pues, $\varepsilon\alpha(x)$ es continua. Por tanto, de (2.2) se tiene $\dfrac{\delta y}{\varepsilon P} < M$. Entonces,

$$y[\varphi(x) + \varepsilon\psi(x)] - y[\varphi(x) + \varepsilon \sum_{i}^{n} \theta_i(x)] < M\varepsilon P h',$$

donde h' corresponde a la suma de los intervalos en los cuales $\alpha(x) \neq 0$; esto es, en los k_i, m_i. De lo anterior resulta que, $h' < 2\delta$, puesto que $\sum_i^n k_i + \sum_i^n m_i < \delta < 2\delta$. Obteniéndose así, la desigualdad deseada. $\square$

A continuación Volterra enuncia los siguientes teoremas, cuyas demostraciones las realizaremos, ya que Volterra no presenta las demostraciones de estos resultados.

Teorema. Si $\sum_{i=1}^{0} \theta_i(x) = 0$, entonces se satisface la siguiente igualdad

$$y[\varphi(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \theta_i(x)] - y[\varphi(x)] = \sum_{r=1}^{n} \{y[\varphi(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{r} \theta_i(x)] - y[\varphi(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{r-1} \theta_i(x)]\}. \tag{2.3}$$

Demostración. Al realizar la sumatoria del lado derecho de la ecuación (2.3), se obtiene inmediatamente el resultado deseado.

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n} \{y[\varphi(x) &+ \varepsilon \sum_{i=1}^{r} \theta_i(x)] - y[\varphi(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{r-1} \theta_i(x)]\} = (y[\varphi(x) + \varepsilon\theta_1(x)] \\
&- y[\varphi(x)]) + (y[\varphi(x) + \varepsilon\theta_1(x) + \varepsilon\theta_2(x)] - y[\varphi(x)] + \varepsilon\theta_1(x)) \\
&+ ... + (y[\varphi(x) + \varepsilon\theta_1(x) + \varepsilon\theta_2(x) + ... + \varepsilon\theta_n(x)] \\
&- y[\varphi(x) + \varepsilon\theta_1(x) + \varepsilon\theta_2(x) + ... + \varepsilon\theta_{n-1}(x)]) \\
&= y[\varphi(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \theta_i(x)] - y[\varphi(x)],
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema. Si se define

$$\int_A^B \theta_r(x)\, dx = \int_{E_r}^{F_r} \theta_r(x)\, dx = \sigma_r,$$

entonces se satisface la siguiente igualdad

$$y[\varphi(x)+\varepsilon\sum_{i=1}^{r}\theta_i(x)]-y[\varphi(x)+\varepsilon\sum_{i=1}^{r-1}\theta_i(x)]=\varepsilon\sigma_r\{y'[\varphi(x)+\varepsilon\sum_{i=1}^{r-1}\theta_i(x),t_r]+\eta_r\}. \quad (2.4)$$

Demostración. En efecto, esta expresión se da porque:

$$\begin{aligned} y|[\varphi(x)+\varepsilon\sum_{i=1}^{r}\theta_i(x)]| \quad &- \quad y|[\varphi(x)+\varepsilon\sum_{i=1}^{r-1}\theta_i(x)]| = \\ y|[\underbrace{\varphi(x)+\varepsilon\theta_1(x)+...+\varepsilon\theta_{r-1}(x)}_{g(x)}+\varepsilon\varphi_r(x)]| \quad &- \quad y|[\underbrace{\varphi(x)+\varepsilon\theta_1(x)+...+\varepsilon\theta_{r-1}(x)}_{g(x)}]| \end{aligned}$$

Además, por la condición C3 se tiene:

$$\lim_{\varepsilon\sigma_r\to 0}\frac{\delta y}{\varepsilon\sigma_r}=\lim_{\varepsilon\sigma_r\to 0}\frac{y[g(x)+\varepsilon\theta_r(x)]-y[g(x)]}{\varepsilon\sigma_r},$$

y es igual a

$$\lim_{\varepsilon\sigma_r\to 0}\frac{y[g(x)+\varepsilon\theta_r(x)]-y[g(x)]}{\varepsilon\sigma_r}=y'[g(x),t_r], \quad t_r\in h_r,$$

Por lo tanto, existe η_r tal que,

$$\frac{y[g(x)+\varepsilon\theta_r(x)]-y[g(x)]}{\varepsilon\sigma_r}=y'[g(x),t_r]+\eta_r.$$

En la expresión anterior, el número t_r está comprendido en el intervalo h_r. Como consecuencia de C3, será posible encontrar η_r menor que un número η pequeño y arbitrario, siempre que ε y h_r sean inferiores a un número μ suficientemente pequeño e independiente de r. □

Teorema.

$$y|[\varphi(x)+\varepsilon\psi(x)]|-y|[\varphi(x)]| \quad = \quad \varepsilon\sum_{r=1}^{n}\sigma_r.y'|[\varphi(x),t_r]|+\varepsilon\sum_{r=1}^{n}\sigma_r(\eta_r+\zeta_r)+\vartheta(2\delta MP\varepsilon). \quad (2.5)$$

donde $-1 < \vartheta < 1$.

Demostración. Por la continuidad de la derivada[18] tenemos,

$$y'|[\varphi(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{r-1} \theta_i(x), t_r]| = y'|[\varphi(x), t_r]| + \zeta_r. \tag{2.6}$$

Y el ζ_r, puede encontrarse inferior a un número ζ, pequeño y arbitrario, porque ε se toma suficientemente pequeño. De acuerdo a (2.1) tenemos

$$y[\varphi(x) + \varepsilon\psi(x)] - y[\varphi(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \theta_i(x)] < 2\delta MP\varepsilon,$$

entonces existe $\vartheta \in (-1, 1)$ tal que

$$y[\varphi(x) + \varepsilon\psi(x)] - y[\varphi(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \theta_i(x)] = \vartheta(2\delta MP\varepsilon)$$

de la cual se obtiene

$$y[\varphi(x) + \varepsilon\psi(x)] = \vartheta(2\delta MP\varepsilon) + y[\varphi(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \theta_i(x)]$$

y de aquí combinando con (2.3), (2.4) y (2.5)

[18] La condición C4 impone la continuidad de la derivada

$$\begin{aligned}
\overbrace{y[\varphi(x)+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\theta_i(x)]}^{\star} - y[\varphi(x)] &\overset{(2,3)}{=} \sum_{r=1}^{n}\{y[\varphi(x)+\varepsilon\sum_{i=1}^{r}\theta_i(x)] - y[\varphi(x)+\varepsilon\sum_{i=1}^{r-1}\theta_i(x)]\} \\
&\overset{(2,4)}{=} \sum_{r=1}^{n}\{\varepsilon\sigma_r\{y'[\varphi(x)+\varepsilon\sum_{i=1}^{r-1}\theta_i(x),t_r]+\eta_r\}\} \\
&\overset{(2,5)}{=} \sum_{r=1}^{n}\{\varepsilon\sigma_r\{\{y'[\varphi(x),t_r]+\zeta_r\}+\eta_r\}\} \\
&= \sum_{r=1}^{n}\varepsilon\sigma_r y'[\varphi(x),t_r]+\varepsilon\sigma_r\eta_r+\varepsilon\sigma_r\zeta_r \\
&= \sum_{r=1}^{n}\varepsilon\sigma_r y'[\varphi(x),t_r]+\varepsilon\sum_{r=1}^{n}\sigma_r(\eta_r+\zeta_r).
\end{aligned}$$

Pero $(\star)$ es igual a $y[\varphi(x)+\varepsilon\psi(x)]-\vartheta(2\delta PM\varepsilon)$, entonces obtenemos la ecuación (2.6):

$$\begin{aligned}
y|[\varphi(x)+\varepsilon\psi(x)]|-y|[\varphi(x)]| &= \varepsilon\sum_{r=1}^{n}\sigma_r.y'|[\varphi(x),t_r]| \\
&+ \varepsilon\sum_{r=1}^{n}\sigma_r(\eta_r+\zeta_r)+\vartheta(2\delta MP\varepsilon).
\end{aligned}$$

$\square$

A continuación Volterra hace el uso del concepto de oscilación, enunciando el siguiente teorema:

Teorema.

$$\sigma_r = h_r\psi(t_r) + \tau\{h_r D_r + (k_r + m_r)P\}, \tag{2.7}$$

donde, D_r es la oscilación[19] de $\psi(x)$ en h_r y $\tau \in (-1, 1)$.

Demostración. Partamos del hecho de que

$$\begin{aligned}
\int_{h_r} \theta_r(x)\,dx &= \int_{k_r} \theta_r(x)\,dx + \int_{l_r} \theta_r(x)\,dx + \int_{m_r} \theta_r(x)\,dx \\
&= \int_{k_r} \theta_r(x)\,dx + \int_{l_r} \psi(x)\,dx + \int_{m_r} \theta_r(x)\,dx \\
&= \int_{h_r} \psi(t_r)\,dx - \int_{h_r} \psi(t_r)\,dx + \int_{k_r} \theta_r(x)\,dx + \int_{l_r} \psi(x)\,dx + \int_{m_r} \theta_r(x)\,dx \\
&< \int_{h_r} \psi(t_r)\,dx - \int_{h_r} \psi(t_r)\,dx + (k_r + m_r)P + \int_{h_r} \psi(x)\,dx \\
&< \int_{h_r} \psi(t_r)\,dx - \int_{h_r} [\psi(x) - \psi(t_r)]\,dx + (k_r + m_r)P \\
&< \psi(x)h_r + D_r h_r + (k_r + m_r)P
\end{aligned}$$

y como $\sigma_r = \int_{h_r} \theta_r(x)\,dx$, se cumple entonces que

$$\sigma_r < \psi(x)h_r + D_r h_r + (k_r + m_r)P$$

por lo tanto, existe un $\tau \in (-1, 1)$ tal que

$$\sigma_r = h_r\psi(t_r) + \tau\{h_r D_r + (k_r + m_r)P\}.$$

$\square$

[19] En (Apostol, 1996), se define la oscilación de una función f definida y acotada en un intervalo compacto S de $\mathbb{R}$. Si $T \subseteq S$, el número $\Omega_f(T) = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in T\}$

Teorema.

$$y[\varphi(x)+\varepsilon\psi(x)]-y[\varphi(x)]=\varepsilon\sum_{r=1}^{n}h_r\psi(t_r).y'[\varphi(x),t_r]+\varphi\sum_{r=1}^{n}\sigma_r.(\eta_r+\zeta_r)+\vartheta'\xi\zeta\ , \qquad (2.8)$$

donde $\xi=(2M+1)\delta P+\sum_{r=1}^{n}h_rD_r$.

Demostración. Demostremos este resultado:

Sabemos por la ecuación (6) que,

$$y[\varphi(x)+\varepsilon\psi(x)]-y[\varphi(x)] \;=\; \varepsilon\sum_{r=1}^{n}\sigma_r.y'[\varphi(x),t_r]+\varepsilon\sum_{r=1}^{n}\sigma_r(\eta_r+\zeta_r)+\vartheta(2\delta MP\varepsilon).$$

Si en esta ecuación se remplaza la igualdad (2.7) se obtiene:

$$\begin{aligned}
y[\varphi(x)+\varepsilon\psi(x)]-y[\varphi(x)] &= \varepsilon\sum_{r=1}^{n}[h_r\psi(t_r)+\tau\{h_rD_r+(k_r+m_r)P].y'[\varphi(x),t_r]\\
&+ \varepsilon\sum_{r=1}^{n}[h_r\psi(t_r)+\tau\{h_rD_r+(k_r+m_r)P](\eta_r+\zeta_r)+\vartheta(2\delta MP\varepsilon)\\
&= \varepsilon\sum_{r=1}^{n}h_r\psi(t_r)y'[\varphi(x),t_r]+\varepsilon\sum_{r=1}^{n}\tau\{h_rD_r+(k_r+m_r)P\,y'[\varphi(x),t_r]\\
&+ \varepsilon\sum_{r=1}^{n}[h_r\psi(t_r)+\tau\{h_rD_r+(k_r+m_r)P](\eta_r+\zeta_r)+\vartheta(2\delta MP\varepsilon)\\
&\leq \tau\varepsilon\sum_{r=1}^{n}h_rD_ry'|[\varphi(x),t_r]+\varepsilon\tau\sum_{r=1}^{n}(k_r+m_r)P\,y'[\varphi(x),t_r]+\vartheta(2\delta MP\varepsilon)\\
&< \gamma[\varepsilon\sum_{r=1}^{n}h_rD_r+P\varepsilon\sum_{r=1}^{n}(k_r+m_r)+2\delta MP\varepsilon]\\
&< \gamma[\varepsilon\sum_{r=1}^{n}h_rD_r+P\varepsilon\delta+2\delta MP],
\end{aligned}$$

donde $\gamma=\max\{\tau y'[\varphi(x),t_r],\vartheta\}$. De lo anterior se sigue que existe ϑ' tal que:

$$\begin{aligned}\tau\varepsilon\sum_{r=1}^{n} h_r D_r y'[\varphi(x), t_r] + \varepsilon\tau\sum_{r=1}^{n}(k_r + m_r)P\, y'[\varphi(x), t_r] + \vartheta'(2\delta MP\varepsilon) &= \varepsilon\vartheta'[\sum_{r=1}^{n} h_r D_r + \delta P(1+2M)] \\ &= \varepsilon\vartheta'\xi,\end{aligned}$$

que era justamente el resultado que se quería demostrar. □

A continuación, Volterra divide por ε y luego saca el límite haciendo que $\varepsilon, \delta, h_1, h_2, ..., h_n$ tiendan a cero, obteniendo la igualdad:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{y[\varphi(x)+\varepsilon\psi(x)] - y[\varphi(x)]}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Delta y}{\varepsilon} = \int_A^B \psi(t)\, y'[\varphi(x), t]\, dt.$$

La cual puede también escribirse así:

$$\Delta y = \varepsilon\int_A^B \psi(t)\, y'[\varphi(x), t]\, dt + \rho.$$

Aquí Volterra hace uso de las operaciones clásicas sobre infinitesimales, al observar que ρ es un infinitesimal de orden superior a ε [20].

Seguidamente, Volterra establece las siguientes notaciones:

a) La expresión $\varepsilon\int_A^B \psi(t)\, y'[\varphi(x), t]\, dt$, se denota por $\delta\, y[\varphi(x)]$ o δy;

b) Como $\varepsilon\psi(t)$, se tiene que

$$\delta y[\varphi(x)] = \int_A^B y'[\varphi(x), t]\, \delta\varphi(x) dt,$$

que él denomina la primera variación de y.

[20] se dice que ρ es un infinitésimo de mayor orden u de orden superior a ε, si ρ tiende a cero con mayor rapidez.

A continuación presentaremos a manera de ejemplo, el cálculo de la derivada de Volterra para una funcional. Consideremos la funcional

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\, dx.$$

Restrinjamos la función $f(x, y, z)$ al conjunto de funciones continuas en (x, y, z) con $x \in [a, b]$ y $|y - y(x)| + |z - y'(x)| < \delta$.

Suponga que existe $y(x)$ que minimiza a $F(y)$. Ahora considere a $F(y + t\varphi)$ para una función arbitraria fija $\varphi \in C^1[a, b]$, note que esta función depende de la variable t. suponga que esta función alcanza su mínimo en $t = 0$, se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(y + t\varphi)\Big|_{t=0} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\int_a^b f(x, y + t\varphi, y' + t\varphi')\, dx &= 0 && \text{usando regla de la cadena} \\
\int_a^b f_y(x, y, y')\,\varphi + f_{y'}(x, y, y')\,\varphi'\, dx &= 0 && \text{aplicando integración por partes} \\
\int_a^b f_{y'}(x, y, y')\,\varphi'\, dx &= -\int_a^b \varphi\,\frac{d}{dx}\, f_{y'}(x, y, y')\, dx && \text{reagrupando términos} \\
\int_a^b \left[f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx}\, f_{y'}(x, y, y')\right] \varphi\, dx &= 0.
\end{aligned}$$

Ahora nos planteamos el problema clásico del cálculo de variaciones

$$\begin{aligned}
&\underset{x}{\text{minimizar}} && F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\, dx. \\
&\text{sujeto a} && y(a) = A,\; y(b) = B.
\end{aligned}$$

De acuerdo a lo anterior podemos decir que la primera variación de F es:

$$\delta F[y,\varphi] = \int_a^b \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] \varphi \, dx$$

y la derivada del funcional será

$$F'[\varphi, x] = f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}.$$

Como $y(a) = A$ y $y(b) = B$, se concluye que

$$\delta F[y,\varphi] = \int_a^b \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] \varphi \, dx \; + \; f_{y'}(b, B, y'(b)) - f_{y'}(a, A, y'(a)).$$

Analizando de manera global, la caracterización de Volterra, vemos que la existencia de la derivada está supeditada al cumplimiento de múltiples condiciones que la tornan demasiado restrictiva. Desde nuestra perspectiva actual, y utilizando lenguaje topológico, podemos decir, que, en términos generales, Volterra considera el conjunto $E = \{$ aplicaciones C^1 de un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3\}$[21], y las aplicaciones $y : E \longrightarrow \mathbb{R}$, continuas para la topología de convergencia uniforme. Para estas funcionales, Volterra intenta una generalización de la noción de derivada, a la manera del cálculo de variaciones.

[21] Conjunto de líneas

Capítulo 3

Análisis general en la obra de Maurice de Fréchet

El tratamiento de la derivada en el análisis funcional es un caso concreto que nos permite visualizar las concepciones de Fréchet respecto a su programa de generalización, donde lo abstracto juega un papel importante. La idea fundamental de Fréchet va en la misma dirección del *aphairesis* aristotélico, esto es, fijarse en las propiedades que mueven el interés particular, dejando de lado las demás propiedades. Fréchet hace lo mismo pero a otro nivel de lo concreto. Aristóteles parte de la realidad sensible; Fréchet de objetos ya instaurados en el cuerpo teórico matemático.

Sin embargo las generalizaciones y las extensiones son cuestiones propias de la práctica matemática. Comúnmente, par ampliar el campo teórico es recurrente el uso de las extensiones para introducir nuevos conceptos que se hace necesario definir o para ampliar el dominio de una determinada definición. Esta práctica se hace notoria especialmente en los procesos que involucran al infinito. Para muchos matemáticos, en todos los tiempos, les parecía "natural" *extender* procesos propios de lo finito a lo infinito. Históricamente el análisis se va desarrollando de este modo, especialmente en el caso de la derivada y de la integral. Sin embargo el proceso de generalizar va mas allá de la extension de los dominios de definición, como lo analizaremos a continuación.

En la Introducción de su obra *Les Espaces Abstraits et leur théorie considérée comme Introduction á l'Analiyse Générale* (Fréchet, 1928), Fréchet fija sus concepciones sobre los fundamentos del programa de investigaciones que había venido adelantando en los últimos veinte años. Este programa se orientaba entonces a extender el análisis clásico al estudio de las funciones abstractas de variables abstracta. Un primer paso en esa dirección era unificar en su libro los resultados más importantes obtenidos anteriormente por el mismo Féchet o por otros autores en la teoría de funciones y el análisis funcional, al trabajar sobre distintas clases de espacios abstractos. Básicamente sobre espacios métricos, incluidos los espacios de Banach, o espacios cuya topología se define por medio de la convergencia de sucesiones numerables o de familias de vecindades. Esta obra está destinada a presentar las bases del análisis general al público matemático de estudiantes universitarios e investigadores que no estaban al tanto de este nuevo campo de estudio a mediados de los años 1920. En consecuencia, en la Introducción Fréchet presenta apreciaciones que podrían entenderse en la línea de caracterizar el objeto y el método del análisis general, en un esfuerzo por mostrar que esta disciplina tiene un estatuto científico especifico. Aunque no se trata precisamente de un ejercicios sistemático de conceptualización, pues estas apreciaciones no están organizadas por separado y por lo regular acompañan a otros comentarios suyos sobre diferentes cuestiones matemáticas concernientes a la obra; en esta Introducción Fréchet resume sus concepciones sobre aspectos cognitivos, históricos, epistemológicos y filosóficos relativos a la generalización de los espacios abstractos.

Vamos enseguida a detenernos en la consideración de tales ideas según las modalidades, el orden y los énfasis en que fueron expuestas por su autor en los distintos párrafos de la "introducción" (Fréchet, 1928). Al tratar de situarlas en su contexto histórico, buscaremos en particular destacar las conexiones con opiniones similares que el propio Fréchet pudo haber manifestado alrededor de estas materias en otros momentos. Intentaremos con todo ello exhibir los esfuerzos realizados en los orígenes del desarrollo del análisis funcional para allanarle el camino a la actividad investigativa mediante la unificación de los criterios y procedimientos sobre un mismo objeto de trabajo matemático. Igualmente se intenta mostrar que las particularidades y la diversidad de abordaje en campos conceptuales afines, darán paso a la reflexión crítica sobre los principios y a la recopilación de lo diverso en un mismo campo conceptual. En relación con este nuevo estadio de desarrollo, muchos de los resultados de la etapa previa aparecerán listados como elementos en los textos avanzados de la teoría general de funciones y de análisis funcional.

3.1. La noción de funcional y las variables abstractas

Fréchet constata las dificultades que entonces se enfrentaban al tener que representarse los nuevos objetos abstractos llamados *funcionales*. Comparadas con las funciones numéricas de una variable numérica sobre las cuales se tienen imágenes visuales seculares, ni siquiera la mas elemental de las funcionales, las funcionales numéricas de una variable de naturaleza cualquiera, podían exhibirse fácilmente al entendimiento. Esta dificultad ya había sido señalada por Hadamard:

> El *continuo funcional*, es decir la multiplicidad obtenida haciendo variar continuamente una función de todas las maneras posibles, no ofrece, en efecto, a nuestro entendimiento, ninguna imagen simple. La intuición geométrica no nos enseña nada, *a priori*, sobre su cuenta (Hadamard, 1919, pp.1-18.)

Desde un punto de vista cognitivo, se podría superar esta dificultad expresando las nociones complejas y recientes, en términos de nociones afines con una historia previa. Lo anterior permite que el sujeto represente tales nociones por una combinación de imágenes mentales de otras nociones conocidas. En este caso se trata de una actividad que pretende buscar los fines o el propósito de ser de los objetos matemáticos con fines pedagógicos y cognitivos, en virtud del cual a un concepto como la función de línea, por ejemplo, se le encuentra un "representante" en la operación históricamente bien establecida que consiste en asignarle la medida al área de una curva plana cerrada, a condición desde luego que esta área sea calculable (es decir, que la curva sea suficientemente regular). El sujeto estaría mejor preparado para formarse la representación cognitiva del concepto abstracto, si comienza por entender estos "ejemplos", ya que ellos tienen el efecto de reveladores "concretos" de las propiedades que designa y, de esta manera, permiten proyectar en el entendimiento imágenes "simples y cómodas" suyas. Esta conexión con las estructuras cognitivas y educativas de Fréchet se pueden observar con mas detalle en (Arboleda, 2012), en donde se propone un análisis sobre las ideas sobre la *desaxiomatización* como movimiento inverso de la síntesis inductiva, que le parece extremadamente importante a Féchet desde el punto de vista didáctico.

Por otro lado Fréchet señala en referencia a lo anterior, que el interés investigativo de estos nuevos entes abstractos consiste ante todo en la consideración de sus " propiedades infinitesimales". Se refiere a las dos tendencias que ya por entonces orientaban las investigaciones sobre espacios funcionales. De una parte, el estudio formal de las propiedades operatorias de las funcionales y sus aplicaciones[1] y, por otra, el análisis funcional entendido como la extensión a tales espacios de funcionales, de las nociones elementales de cálculo infinitesimal. O bien el análisis general, para el caso en que la extensión se desarrollo en espacios de naturaleza cualquiera.

[1] Fréchet se reservaba preferentemente la denominación de " cálculo funcional".

3.2. Los métodos del análisis funcional

Las consideraciones que hace Fréchet a este respecto muestran las dificultades de instauración del concepto de *dominio de definición* de la funcional. es decir el problema histórico de la conformación de un consenso entre los matemáticos sobre la conveniencia de definir la funcional directamente en el campo de variación de su " argumento" (funciones o elementos de naturaleza cualquiera), abandonando así la usanza anterior de diferir dicho argumento a un parámetro o coordenada. Esta conveniencia se pone de manifiesto, por ejemplo, en el método de prolongación a un dominio mas extenso, de una funcional que inicialmente estaba definida en cierto dominio, respondiendo así a requerimientos "naturales" del problema. Esta es otra forma de la concepción antes señalada, consistente en buscar imágenes de objetos complejos por deconstruccion histórica: entendiéndolos como representantes de una clase de objetos ya constituidos. Los límites de esta modalidad de generalización son reconocidos por el propio Fréchet. La idea de lo "natural" se asocia con la idea de "desarrollo necesario" en varios temas del análisis funcional. Este tema hizo parte de una interesante discusión entre Fréchet y Volterra (a través de su correspondencia o indirectamente en sus publicaciones). Ello nos permitirá comparar dos apuestas investigativas igualmente coherentes, aunque distintas, respaldadas en concepciones también diferentes sobre problemas como las modalidades de la generalización y la analogía en matemáticas, o aún sobre las maneras de operar funcionalmente en tal o cual espacio abstracto atendiendo al interés matemático detrás de estos programas de investigación, o considerando su utilidad desde el punto de vista de las aplicaciones. en la "Introducción" a su obra *Espacios Abstractos*[2], se encuentran algunas trazas de esta discusión. Fréchet señala las dificultades del empleo de procedimientos de generalización como el utilizado en el cálculo de variaciones, en el cual las funciones generalizadas no son definidas de la manera usual, sino que dependen en ultima instancia de un parámetro numérico. Por esta misma razón objeta el uso frecuente en el análisis funcional del método de caracterizar las funciones en términos de una infinidad de numerable de parámetros o coordenadas, procediendo por analogía en el paso al límite con el caso de un número infinito de parámetros.

Aunque los procedimientos anteriores son intuitivamente útiles y sus aplicaciones físicas y matemáticas no son discutibles, desde el punto de vista de la investigación en análisis funcional (y sobre todo en análisis general), Fréchet considera que es necesario que el elemento del cual depende la funcional pueda ser tratado "directamente como variable y de la misma forma en que ella se representa naturalmente", sin intermediaciones de "elementos parásitos"

[2]Fréchet, M. (1928) Op. cit.

que introducen “complicaciones inútiles y extrañas al fondo del problema”.

3.3. Naturaleza de la variable

Fréchet hace dos consideraciones sobre la noción de funcional:

a) Es un constructo histórico elaborado a partir de una experiencia previa. Por ejemplo, cuando en este mismo aparte Fréchet afirma “que no solamente se han encontrado en anteriores oportunidades funcionales sin saberlo, sino que alguna de tales funcionales eran de una importancia extrema, fundamental.” es precisamente en conexión con lo anterior que dice: “el análisis funcional responde a una necesidad”[3].

b) Una vez adquirido su estatuto conceptual definitivo, la extrema generalidad de la definición de funcional se impone sobre los particularismos de las situaciones que le dieron origen.

Históricamente hablando, la funcional se convierte en objeto matemático a partir de una experiencia previa en la investigación de problemas cuya solución requería la intervención de un concepto con tales características. Si en algunas ocasiones se tomó más conciencia que en otras sobre la conveniencia de formalizar como objeto matemático la noción de funcional, ello tuvo que ver con el estado imperante en el desarrollo del conocimiento. Pero tal o cual nivel de formalización siempre obedeció a una *necesidad*. No se llegó a élla a través de un ejercicio inútil del entendimiento, que en en palabras de Fréchet: “la noción de funcional y de variable no necesariamente numérica no son concepciones *a priori*, producto de un espíritu de generalización sistemático: se han encontrado funcionales en todas las épocas”[4].

Fréchet menciona concretamente el problema del estudio de la variación infinitesimal de una función generalizada de Green sobre una superficie, a partir del cual Hadamard y posteriormente su alumno Paul Lévy, desarrollarían la teoría de las ecuaciones de derivadas

[3]De nuevo podemos observar en acto el estilo “constructivista” de Fréchet. El ejercicio que le permite seleccionar ejemplos “históricos” para proyectar imágenes más intuitivas del concepto formalizado, parece estar asociado a una concepción de que la idea esencial del concepto ya estaba prefigurada en alguna etapa previa de su desarrollo. Por ejemplo, cuando este mismo afirma: “que no solamente se han encontrado en anteriores oportunidades funcionales sin saberlo, sino que algunas de tales funcionales eran de una importancia extrema, fundamental”. Es precisamente en conexión con lo anterior que dice: “el análisis funcional responde a una necesidad”. Esta condición empirista de Fréchet seria discutida severamente por Gonseth en las *Entretiens de Zurich* (Gosenth, 1941).

[4]Fréchet, M. (1928) Op. cit., p.2

funcionales. Sin una noción preliminar de funcional habría sido imposible la formulación y solución de este problema. De otra parte, al constatarse que a partir de una funcional se pueden crear funcionales de genero diferente y conociendo las ventajas que resultan al trabajar con funcionales cuya variable es de naturaleza cualquiera, el análisis funcional adquiriría una connotación epistemológica nueva con respecto al punto de vista dominante en sus orígenes consistente en restringir el campo de definición de dicha variable.

3.4. El análisis general

Fréchet recuerda que en los comienzos del análisis funcional (en los trabajos de Volterra y la escuela italiana), lo usual era compartimentalizar el estudio de distintas categorías de funcionales numéricas según los campos particulares de definición de la variable (puntos, curvas, funciones, etc.). Se procedía así por analogía con la modalidad de trabajo característica de la teoría de funciones. Esto es, retomar propiedades ya conocidas de una categoría de funciones de variable numérica, para luego aplicarla a otra categoría (análoga) de funcionales. En uno y en otro caso los campos de valores de la variable eran de géneros distintos pero de naturaleza preestablecida. El aporte de Fréchet a comienzos del siglo XX consistió en reconocer que no necesariamente había que tener en cuenta la naturaleza concreta de la variable para extender al campo de las funcionales algunas propiedades fundamentales del cálculo infinitesimal. Existía la creencia de que las propiedades generalizadas mediante este procedimiento podían demostrarse de una manera más fácil y precisa. Fréchet acertó al señalar que lo importante era tener en cuenta las propiedades topológicas del espacio (abstracto) en el cual se define la funcional[5]. También tuvo razón al proponerse llevar a delante las modalidades de razonamiento abstracto y aplicar la generalización operada sobre el dominio de la funcional, al campo de valores de la funcional en sí misma, reemplazando la funcional numérica por una funcional de naturaleza cualquiera. Fréchet no hace ninguna interpretación filosófica, histórica epistemológica sobre las condiciones que habrían posibilitado esta *migración* de generalidad del dominio de la variable a la

[5]Esta es una preocupación central en Fréchet incluso con anterioridad a su tesis de 1906. Ver, por ejemplo, la nota de 1904 presentada a los *Comptes rendus* de la academia de París, sobre la generalización a la clase de funcionales continuas, de la propiedad de Weierstrass sobre la existencia del extremo de una función real continua en: Fréchet, M. (1928) *Les Espaces Abstraits et leur théorie considérée comme Introduction á l'Analiyse Générale. p. 275-276.* Fréchet afirma que esta fue "la primera memoria consagrada al estudio de los conjuntos abstractos de funciones de variables abstractas". En efecto, Fréchet introduce en esta nota el enfoque que actualmente nos es familiar (el cual será sistematizado en su tesis), centrado en el análisis de las propiedades topológicas (de las partes compactas de un espacio L de convergencia) que deben imponerse al espacio para que la funcional definida en él generalice el teorema de Weierstrass.

funcional misma. Simplemente da a entender que, en cierto momento, esta posibilidad habría gravitado sobre las investigaciones suyas y de otros pioneros como E.H. Moore quien se pregunta: "¿no es posible estudiar al mismo tiempo funcionales de apariencias muy diversas?", "¿porqué no generalizar integralmente?". Podría formularse la hipótesis de que esta generalización a ultranza del objeto del análisis funcional (por una vía distintas la de funciones) estuvo permanentemente estimulada por el programa de Hadamard de darle un tratamiento conjuntista al continuo funcional. Recordemos que Hadamard afirmaba en el epígrafe suyo de los *Espacios abstractos* que el procedimiento *analítico* era el único medio para razonar sobre las funcionales, ante la imposibilidad de formarnos una imagen simple, intuitiva y *a priori* del continuo constituido por ellas (Hadamard, 1919, pp.1-18.)[6].

Entendida como una operación entre elementos de un espacio de naturaleza cualquiera, la funcional se convierte así en objeto del análisis general[7]. Su importancia investigativa se pone en evidencia, según Fréchet, en sus trabajos dedicados entre 1909 y 1925 al estudio de las transformaciones definidas sobre espacios abstractos, en la aplicación de los homeomorfismos para la clasificación de toda una gama diversa de espacios de acuerdo con su *tipo de dimensión*, y en la generalización de la noción de diferencial.

3.5. Los espacios abstractos

En tanto objeto del análisis general, la funcional solo puede ser estudiada en conexxion con otro objeto existente en el campo conceptual autónomo de la teoría de conjuntos abstractos: el objeto *espacio abstracto*. Un espacio abstracto es una clase o conjunto de elementos de naturaleza homogénea pero cualquiera[8], en la cual se ha definido la noción

[6] Aquí Frechét no hace ninguna interpretación histórica, epistemológica o filosófica sobre las condiciones que habría posibilitado esta *migración* de generalidad del dominio de la variable a la funcional misma. Simplemente da a entender que, en cierto momento, esta posibilidad habría gravitado sobre las investigaciones suyas y de otros pioneros como E. H. Moore. Podría aquí formularse la hipótesis de que esta generalización decidida del análisis funcional (por vía distinta a la teoría de funciones), estuvo permanentemente permeada por el programa de Hadamard de darle un tratamiento conjuntista al continuo funcional.

[7] En su historia del análisis funcional, Dieudonné define el objeto de esta disciplina en una perspectiva parecida a aquella en que Fréchet definía el objeto del análisis general: buscar el espacio más abstracto en el cual existan las mejores condiciones para operar con el objeto funcional (generalizada), mediante todas las modalidades posibles (algebraicas, analíticas, topológicas, etc.). Estos espacios son, para Dieudonné, los espacios vectoriales topológicos. Su estudio y de las aplicaciones establecidas entre ellos, "cubre una gran parte del análisis moderno, en particular, la teoría de ecuaciones diferenciales de derivadas parciales". (Dieudonné, 1981).

[8] Fréchet también propone la siguiente definición: "llamemos clase *abstracta* a un conjunto de una misma naturaleza, *desconocida y voluntariamente ignorada*" (Fréchet, 1928, p. 9). Se podría interpretar este énfasis más allá de toda connotación voluntarista, como que Fréchet está queriendo indicar que la constitución del

de *proximidad* entre tales elementos. Es precisamente esta noción de proximidad, la que permite de hecho establecer la conexión entre el análisis general y la teoría de conjuntos abstractos. En efecto, al extender al análisis general los métodos de la teoría de funciones, adquiere importancia el estudio de la variación de una funcional; variación ésta que establece (en el conjunto abstracto en el cual la funcional toma sus valores), cuando el elemento que constituye la variable está próximo a un elemento predeterminado (en el conjunto abstracto de definición de la funcional). La noción de proximidad es, pues, esencial para caracterizar a una y a otra clase de conjuntos abstractos como espacios. Por ello mismo, insiste Fréchet, el problema de determinar las propiedades infinitesimales de las funcionales está lógicamente precedido por el problema de establecer propiedades infinitesimales de los conjuntos abstractos. Después de dos décadas de investigaciones, Fréchet había contribuido a realizar el programa que Hadamard propuso a sus alumnos a comienzos de los años 1910: la teoría del continuo funcional. De ahí el titulo de su obra de 1928: *La teoría de los espacios abstractos como introducción del análisis general.*

3.6. Propiedades de los conjuntos abstractos

Fréchet muestra en este parágrafo que, en la perspectiva histórica, un concepto como el de *conjunto abstracto* adquirió su estatuto matemático sólo en una época muy reciente, en la medida que se adelantó a fondo la investigación sobre sus propiedades topológicas. El estadio más avanzado en la maduración de la teoría está representado justamente por la caracterización (topológica) de los espacios abstractos, con el fin de sentar el desarrollo del análisis general sobre bases conceptuales firmes. Veamos algunas de las consideraciones históricas que hace Fréchet a este respecto y que nos dan mayor información sobre sus concepciones con respecto a ciertas cuestiones cognitivas y epistemológicas de la generalización matemática [9]:

objeto espacio abstracto es un acto intencional, característico del razonamiento como actividad humana. esta concepción de Fréchet ha sido estudiada en Gonseth (1941).

[9]Mas adelante veremos que sin todavía tener el nivel de una reflexión filosófica rigurosa sobre la matemática como actividad de conocimiento, las concepciones de Fréchet se dejan tratar filosóficamente: el origen de nociones matemáticas fundamentales en la experiencia, el rol de la experiencia, la naturaleza y función de las convenciones, la constitución de las idealidades matemáticas, la actividad del sujeto cognitivo, la síntesis inductiva, la axiomatización, la deducción, la verificación, etc. Ellas cumplen algunos de los requerimientos que Gonseth y Lebesgue le asignaban a la filosofía de las matemáticas en las *Entretiens*: ser creada por matemáticos, ser una filosofía utilitaria. Una "filosofía de segunda zona", que apunte a comprender cómo opera el pensamiento matemático, cómo se construyen las matemáticas... Ver Gonseth (1941), Op. Cit. pp. 194-209.

a) En una primera fase de su evolución histórica, los pueblos primitivos se representaron un conjunto abstracto únicamente a partir de configuraciones de unos pocos objetos que podían relacionar en su limitada experiencia de cálculos y cuentas. Aunque la representación estaba directamente referida a clase de objetos materiales, su idea de número era independiente de la materialidad de esas entidades o fenómenos naturales a los cuales designaba.

b) Durante un largo periodo de la historia fue anormal reconocer los conjuntos abstractos por la propiedad de lo finito numerable.

c) Solamente en el siglo XIX se hará usual su caracterización mediante la propiedad de lo infinito (numerable o no numerable); evidentemente más por un interés filosófico y matemático que práctico. El mérito le corresponde a Cantor, dice Fréchet. Pero también a algunos matemáticos franceses que esclarecieron el concepto de infinito matemático al separarlo de los principios oscuros e inaceptables que lo confundían en sus orígenes[10]. Gracias a la actividad de unos y otros se ha impuesto una concepción tan "simple" de esta nocion como la que tenemos del número entero. "Bastaría hacer jugar el rol de los dedos en la concepción de los veinte primeros enteros, a las sucesiones, en verdad menos accesibles a los sentidos, pero no por ello menos definidas"[11] (Fréchet, 1928).

d) Un cuarto estadio en el desarrollo de los conjuntos abstractos, tiene que ver con la generalización del concepto de integral. Desde el primer momento de publicación de este resultado en 1915, a Fréchet le pareció importante llamar la atención de los matemáticos sobre el hecho que su procedimiento de generalización no hacía intervenir propiedades infinitesimales del conjunto abstracto sobre el cual se define la integral. Tan solo se emplea la propiedad de aditividad completa de la medida abstracta, el cual fue generalizado por el mismo Fréchet a los conjuntos abstractos. En este sentido, la definición de funcional integrable de Fréchet tiene la misma característica de generalidad de la noción de cardinal o de grupo de transformaciones[12].

[10]Fréchet fijó su posición sobre esta cuestión en (Fréchet, 1934) y en un articulo con el mismo titulo publicado en (Fréchet, 1955).

[11]Recordemos que si bien Fréchet considera que las nociones fundamentales de las matemáticas tienen origen en la experiencia, también tiene en cuenta que existen objetos matemáticos cuya constitución y legitimidad reposa estrictamente en su carácter formal. Él no tiene pues ninguna dificultad en reconocer que la objetividad de un cardinal entero o transfinito la establece a aritmética formal. Incluso Fréchet podría aceptar que este estatuto no depende ni de su génesis cognitiva ni del grado "concreto" de su representación sensorio-motora.

[12]Según Paul Lévy, la noción de medida abstracta de Fréchet, sobre la cual reposa su propuesta de teoría general de la integración en conjuntos abstractos, fue utilizada por P. J. Daniell y N. Wiener aunque ignorando aparentemente su prioridad. Esta teoría se convirtió en la base del cálculo de probabilidades moderno en la axiomatización adelantada en 1933 por A. Kolmogorov; ver (Pier, 1996, p.166).

e) Otras nociones fundamentales del análisis general como la prolongación de funcionales semi-continuas, las transformaciones puntuales abstractas o la diferencial abstractas, explotan a fondo distintas propiedades topológicas del espacio abstracto. Este tipo de investigaciones constituyen, según Fréchet, el quinto nivel de desarrollo de la teoría de conjuntos abstractos.

3.7. Un estudio previo de los conjuntos abstractos es más importante para el desarrollo del análisis funcional que para la teoría clásica de funciones

Fréchet ha reiterado en la "Introducción" que así como la teoría de funciones de variable real está precedida de la teoría (topológica) de la recta real, de manera *análoga* el análisis general (en tanto teoría de las funciones generalizadas) debe fundamentarse en un estudio previo de los espacios abstractos. Pero lo que es un requerimiento lógico no necesariamente es una condición en la evolución histórica: la caracterización topológica de los conjuntos lineales[13] fue introducida con posterioridad a la construcción de la teoría clásica de funciones. Incluso "todo lo que es esencial en la teoría de funciones se obtuvo independientemente de la teoría de los conjuntos lineales. Estos fueron considerados útiles sólo cuando se quiso refinar, estudiar las singularidades , y extender ciertas propiedades de las funciones continuas a las funciones discontinuas." Más aún, algunas propiedades complejas y sin aparente utilidad práctica en la fase más avanzada de desarrollo de la teoría clásica de funciones, años más tarde se revelarían importantes y útiles en el periodo de establecimiento de los elementos del análisis funcional.

Así, por ejemplo, la noción de *semi-continuidad* introducida por René Louis Baire (1874 - 1932) para las funciones de variable real, es generalizada en 1924 por Fréchet a las funcionales numéricas para resolver un problema "concreto" de geometría euclideana. Fréchet observa que la funcional $A(P)$ que le asigna el área a un poliedro P, no es continua."Es decir, para cada poliedro P_0 es posible construir poliedros P (de un número variable de caras), tan próximos como se quiera a P_0 pero cuyas áreas $A(P)$ no son próximas al área $A(P_0)$". Sin embargo, $A(P)$ es una funcional *semi-continua inferiormente*. Para aclarar lo descrito anteriormente, considere el poliedro P_0 fijo, a continuación se construye un poliedro P_0^1 semejante a P_0 de tal manera que P_0^1 contenga a P_0 y la distancia de cara a cara sea menor

[13]Para Fréchet los conjuntos lineales son todos los elementos de partes de $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}^n$

que ϵ (Ver figura 3.1)[14]. Ahora, note que para cualquier poliedro P, talque $|P - P_0| < \delta$ y que satisface $P_0 < P < P_0^1$, pero la desigualdad $|A(P) - A(P_0)| < \epsilon$ no se cumple para todo $\epsilon > 0$. Es decir las áreas de los poliedros $A(P)$ no se acerca al área $A(P)$.

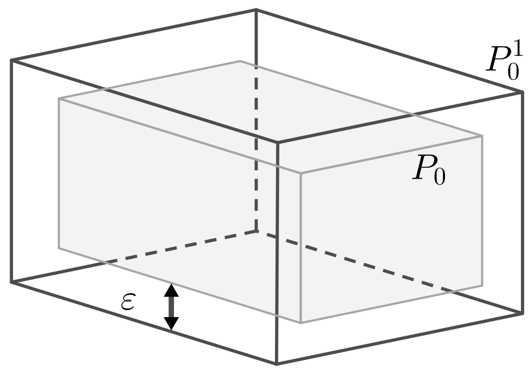

Figura 3.1: Descripción de proximidad entre poliedros

Posteriores investigaciones la darán la razón a Fréchet en cuanto a que la semi-continuidad es no solamente mas general sino mas importante que la continuidad. En una nota de 1924 publicada en los *Comptes rendus* de la academia (Fréchet, 1928, p. 251), Fréchet se interesa en un problema que será estudiado profusamente en las décadas siguientes: cuál topología introducir en el espacio de definición de una funcional abstracta semi-continua, para "prolongarla" en una funcional continua.

3.8. Rol del intervalo

En la teoría clásica las funciones reales se definen usualmente sobre intervalos de **R**. En el análisis funcional se trataría, pues, de definir las funciones numéricas generalizadas sobre partes del espacio abstracto que cumplieran las propiedades esenciales y más frecuentemente utilizadas) de los intervalos numéricos. Fréchet alerta sobre la dificultad del problema. Muestra, por ejemplo, que una primera representación de "intervalo funcional" como el conjunto de las funciones numéricas comprendidas entre dos reales dados, de ninguna manera cumple este requerimiento. El asunto no admite un procedimiento de generalización tan simple. En efecto, en **R** o de $\mathbf{R}^n$ no reviste dificultad hablar de intervalos como sus partes cerradas y acotadas, esta manera de representarse la *compacidad* tiene un "alcance práctico" diferente en otros espacios abstractos en los cuales deberá introducirse atendiendo a las

[14]La idea clave de este proceso es considerar una vecindad volumétrica como un análogo a las vecindades tubulares.

características intrínsecas de tales espacios. Fréchet consagró una serie de trabajos a estudiar las condiciones que debían establecerse sobre distintos espacios abstractos para que sus partes fueran compactas. Estos trabajos no aparecen tanto en *Les Espaces Abstraits et leur théorie considérée comme Introduction á l'Analiyse Générale*, como en sus publicaciones de análisis general propiamente dichas. En la "Introducción" no menciona directamente la compacidad, pero alude a ella como una de esas nociones generalizadas a partir de los conjuntos lineales a las cuales se propuso definir en su forma mas abstracta[15].

3.9. Los métodos del análisis general

Fréchet establece aquí un cierto protocolo para sentar las bases conceptuales del edificio del análisis general, el cual consiste en dos fases de naturaleza diferente:

a) Determinar un sistema de definiciones que exhiban las propiedades de aquellas nociones adoptadas del análisis clásico en su forma mas abstracta posible, y

b) Generalizar a partir de allí las proposiciones clásicas fundamentales.

La segunda es una "cuestión de orden exclusivamente matemático y lógico". Fréchet sabe naturalmente que la proposición generalizada debe demostrarse en el nuevo cuadro teórico, para que pueda considerarse legítimamente instaurada como objeto matemático en el análisis general. Pero le parece que este requisito se puede obviar y que la demostración de la proposición está acabada cuando el proceso argumentativo se ha establecido utilizando los conceptos y propiedades del nuevo corpus teórico. El razonamiento opera entonces en la dirección ordinaria (analítica) a partir de del sistema de definiciones. (Un ejemplo de esta modalidad, es el argumento de la "prueba" de la compacidad en espacios abstractos que consideraremos a continuación). Pero en otros casos no es tan evidente que una proposición "que se sospecha" puede ser generalizada, sea lógicamente aceptada por extension al nuevo cuadro del esquema demostrativo previo. Entonces el razonamiento procede en sentido inverso (sintético): adaptando las definiciones a ciertas condiciones. Pero en cualquiera de las dos situaciones hay que "escrutar, disecar las demostraciones conocidas para ver en

[15] En (Fréchet, 1928, pp.268-272), aparece el listado de una serie de propiedades equivalentes a la compacidad en un espacio topológico general, y algunas otras proposiciones sobre funcionales numéricas y transformaciones abstractas definidas en espacios compactos. Para el estudio histórico del aporte de Fréchet a la compacidad y las discusiones que se dieron al respecto en las correspondencias suyas con otros matemáticos alrededor de los años 1920, ver (Arboleda, 1984, pp. 91-134).

ellas, cuáles son las hipótesis absolutamente indispensables y, en lo posible, colocarlas bajo forma abstracta. A veces habrá que abandonar una demostración que era valida en un caso particular, pero no generalizable, y buscar una enteramente diferente" (Fréchet, 1928, pp. 15-16).

Es fácil reconocer el empleo de este procedimiento desde los propios inicios de la investigación de Fréchet sobre los espacios abstractos. Por ejemplo en la primera memoria consagrada por Fréchet al estudio de los conjuntos abstractos de funciones abstractas en 1904: "Generalización de un teorema de Weirstrass", la cual fue incluida como *Nota A* en un apéndice de la obra *Espacios Abstractos*.[16] Inicialmente se define el paquete de nociones de base: conjunto abstracto, función u operación funcional (uniforme), continuidad de la función (previa introducción en el espacio de la topología de la convergencia de las sucesiones numerables) y el conjunto abstracto. Obviamente este sistema de definiciones, si bien bastante original, resultó ser mas esquemático y sufrirá por ello sucesivos refinamientos en los años siguientes. El segundo paso es generalizar a los espacios abstractos la propiedad de Weirstrass para las funciones continuas de valor real. Esta es para Fréchet *"una cuestión de orden exclusivamente matemático y lógico"* (Fréchet, 1928 p. 15); Fréchet no proporciona la demostración del "teorema" en esa corta nota. Se limita entonces a valorar la importancia de su aporte en cuanto a : (1) aportar un procedimiento para caracterizar la compacidad en términos de la convergencia de sucesiones, (2) mostrar algunas propiedades interesantes de los conjuntos compactos, (3) constatar que la compacidad aplicada a los reales es equivalente a la propiedad de los intervalos de ser partes acotadas y cerradas de $\mathbf{R}$, y (4) resalta el significado del teorema de Weirstrass en $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$ y aún en espacios de dimension infinito numerable. Y concluye así sobre la importancia de su programa de generalización: "Estas proposiciones, cuya apariencia es muy abstracta, comportan numerosas aplicaciones".

[16] p.275-276.

Capítulo 4

Las distintas nociones de derivada a principios del siglo XX

Al preguntarse , entonces, cúal es el principio general que ha dinamizado históricamente la noción de derivada, Fréchet examina las propiedades de la derivada que permitan exhibirla como objeto matemático. Fréchet se pregunta cúal es la propiedad intrínseca que le da razón de ser a la derivada. Fréchet en un artículo publicado en 1914 expresa:

> Me incline pues a tratar de retomar la antigua definición, generalmente olvidada hoy día: la diferencial es la parte principal del crecimiento de la función cuando el crecimiento de la variable se considera infinitamente pequeño (Fréchet, 1914).

En este aspecto, aunque Volterra había dado un primer paso importante, la referencia inmediata de Fréchet fue la definición de diferencial total de una funcion de varias variables, específicamente los trabajos de Hadamard, Otto Stolz (1842 - 1905), Jhon Young (1799 - 1885), James Pierpoint (1866 - 1938) y Paul Levy (1886 - 1971). Veamos, en términos generales, el proceso seguido por Fréchet y que precisamente nos clarifica las diferentes etapas conceptuales que caracterizan la definición de diferencial de Féchet, y que nos conectan con su programa de generalización.

4.0.1. La diferencial de Hadamard

Hadamard dio, en 1923, una nueva definición de la diferencial basada en el teorema de diferenciación de funciones compuestas. La cual muestra que el autor pensaba que el interés era solo didáctico pero posteriores desarrollos probaron que esta definición era también interesante en otros aspectos como lo veremos posteriormente (Hadamard, 1923).

Partiendo de la función de dos variables $z = f(x, y)$, Hadamard propone definir la diferencial total de acuerdo a la expresión clásica:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{4.1}$$

Hay que tener en cuenta que para Hadamard, esta expresión no es mas que un símbolo operatorio. Para Hadamard, esta igualdad significa que si x, y y $f(x, y)$ son expresados en función de una variable u, se tiene:

$$\frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{du}. \tag{4.2}$$

Teniendo en cuenta que no es suficiente las existencia de

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{dx}{du}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{dy}{du}.$$

Para que se satisfaga la igualdad (4.2), Hadamard impone a la función $z = f(x, y)$ una condición suplementaria: Una función $f(x_1, ..., x_n)$ admite en el punto $(a_1, ..., a_n)$ una diferencial, si f admite todas las derivadas parciales de primer orden y si además, cuando $\varphi_1(u), ..., \varphi_n(u)$ son funciones de u tales que $a_1 = \varphi_1(u), ..., a_n = \varphi_n(u)$, para $u = u_0$, todas ellas derivables en $u = u_0$, entonces $f(\varphi_1(u), ..., \varphi_n(u))$ es derivable para $u = u_0$, y se tiene:

$$[\frac{d}{du}f(\varphi_1(u), ..., \varphi_n(u))]_{u=u_0} = f'_{a_1}[\frac{d\varphi_1}{du}]_{u=u_0} + ... + f'_{a_n}[\frac{d\varphi_n}{du}]_{u=u_0}, \tag{4.3}$$

siendo df el símbolo de la operación:

$$\frac{df}{du} = f'_{a_1}dx_1 + ... + f'_{a_n}dx_n. \tag{4.4}$$

Fréchet se da cuenta que la definición de Hadamard enfatiza en sus propiedades operatorias, mientras que otras definiciones ponen énfasis en la propiedad de construir la parte principal del incremento de la función.

Fréchet advierte un problema en la definición de Hadamard, puesto que para algunas funciones , el cociente,

$$\frac{\Delta f}{df} = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{f'_x \Delta x + f'_y \Delta y}$$

no siempre tiende a uno para toda variación arbitraria de Δx y Δy tales que $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$; además, este cociente carece de sentido cuando f'_x y f'_y son ambas cero, sin ser f constante.

A continuación proporcionaremos un ejemplo que pone en evidencia la aclaración anterior. Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudiemos la diferenciabilidad en el punto $(0,0)$.

1. Primero mostremos que existen las derivadas parciales en $(0,0)$.

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0\dfrac{h^2 - 0^2}{h^2 + 0^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{k\dfrac{0^2 - k^2}{0^2 + k^2}}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k^2}{k^2} = -1 \end{aligned}$$

2. Calculemos ahora el límite del cociente $\dfrac{\Delta f}{df}$ cuando $(h,k) \to (0,0)$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)}{f_x(0,0)\,h+f_y(0,0)\,k} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)}{-k} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k\dfrac{h^2-k^2}{h^2+k^2}}{-k} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} -\left(\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right).
\end{aligned}
$$

Acerquémonos por la recta $k=0$

$$
\lim_{h\to 0} -\left(\frac{h^2}{h^2}\right) = -1.
$$

Acerquémonos por la recta $h=k$

$$
\lim_{h\to 0} -\left(\frac{h^2-h^2}{h^2+h^2}\right) = 0.
$$

Por lo tanto

$$
\lim_{(h,k)\to(0,0)} -\left(\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right)
$$

no existe.

4.0.2. La diferencial de Stolz-Young

La primera definición equivalente a la definición actual de la diferencial para funciones de varias variables es la dada por Otto Stolz en 1889, la cual declaraba que una función f es diferenciable en el punto (a,b) si existen, en dicho punto, las dos derivadas parciales de primer orden y si además:

$$
f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) = \Delta x(f_x^{'}(a,b)+\varepsilon) + \Delta y(f_y^{'}(a,b)+\mu),
$$

en donde ε y μ son funciones de Δx y Δy que tienden a cero cuando Δx y Δy tienden a cero (Stolz, 1889). La extensión a n variables es inmediata y su nombre es la diferencial de

Stolz-Young, la cual dice que una función $f(x_1, ..., x_n)$ es diferenciable en el punto $(a_1, ..., a_n)$ si las derivadas parciales $f'_{x_1}, ..., f'_{x_n}$ existen y se tiene:

$$f(a_1 + \Delta x_1, ..., a_n + \Delta x_n) - f(a_1, ..., a_n) = \Delta x_1(f'_{a_1} + \varepsilon_1) + ... + \Delta x_n(f'_{a_n} + \varepsilon_n),$$

donde $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ se hacen infinitamente pequeños con $\mid \Delta x_1 \mid + ... + \mid \Delta x_n \mid$, denominando,

$$df = f'_{a_1}\Delta x_1 + ... + f'_{a_n}\Delta x_n$$

a la derivada de f.

Stolz prueba que con su definición se pueden obtener los resultados del cálculo diferencial de varias variables que se obtenían con la hipótesis de existencia de derivadas parciales en un entorno y continuidad de las mismas en el punto, probó además que esta última hipótesis implicaba la diferenciabilidad, pero dio el siguiente contraejemplo para probar que la reciproca no era cierta:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin(\sqrt{x^2 + y^2}) & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0), \end{cases} \tag{4.5}$$

que es diferenciable en $(0,0)$ sin que haya continuidad de las derivadas parciales en ese punto.

Otro contraejemplo es la función

$$F(x,y) = (x^2 + y^2)g(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

donde g es una función continua sin derivada en ningún punto[1]. La función F es diferenciable en $(0,0)$ pero no hay derivadas parciales en un entorno de $(0,0)$.

En lo que respecta a las condiciones de monogeneidad[2], el primero que demostró que se necesitaban solamente las condiciones de Cauchy Riemann y la hipótesis de diferenciabilidad

[1] Ejemplos de este tipo de funciones continuas sin derivada en ningún punto la podemos encontrar en la disertación de Johan Thim (Thim, 2003).

[2] En la teoría de variable compleja se dice que una función es *monógena* en un punto a si tiene derivada en ese punto. La monogeneidad es sinónimo de derivabilidad. El origen de la palabra monógena hace referencia a la propiedad que todas las derivadas direccionales son iguales (mono=uno, gena=generada).

de u y v fue Fréchet en 1919. Stolz observo que la hipótesis de existencia de las derivadas parciales era superflua, pero no insistió sobre este punto que tiene importancia en las extensiones de la teoría de la diferencial. La definición de Stolz tardo mucho en llegar a los textos de enseñanza y paso aún bastante más tiempo antes de que se le diera a la definición una forma intrínseca:

Si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$, f una aplicacion de Ω en $\mathbb{R}$ y P un punto de Ω, la diferencial de f en P es un vector $df(P)$ con la propiedad:

$$f(P+H) - f(P) = \langle df(P), H \rangle + \|H\|\, r(H); \quad \lim_{H \to 0} r(H) = 0.$$

Para las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ no se presentaron dificultades, ya que una tal aplicación es diferenciable si, y solo si, lo son sus componentes.

4.0.3. La diferencial de Fréchet, primera etapa.

Una función $z = f(x, y)$ es diferenciable en el punto (a, b), si la superficie $z = f(x, y)$ admite en el punto $(a, b, f(a, b))$ un plano tangente no paralelo al plano OZ. Y si ese plano tiene por ecuación

$$z - c = p(x - a) + q(y - b),$$

la diferencial de f es:

$$df = p\, dx + q\, dy.$$

Esta definición conduce a Fréchet por una perspectiva geométrica, y lo pone en concordancia con la búsqueda de ese principio general que identifique la derivada y le de razón de ser, y que, precisamente, constituye el eje central de su programa de generalización. Fréchet entonces enuncia una segunda definición, vía extension el concepto de plano tangente, donde ya se advierte una manera precisa el camino seguido para la generalización a funcionales, en la cual la diferencial de $f(x_1, ..., x_n)$ aparece como una función de los incrementos $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$ que constituye una representación *simple y apropiada*[3] del incremento correspondiente de la función. De manera mas precisa en su artículo publicado

[3]Fréchet lo subraya.

en 1937 expresa lo siguiente:

Una función $f(x_1, ..., x_n)$ es diferenciable en un punto $(a_1, ..., a_n)$ si existe una función de $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$ de primer grado y homogénea tal que

$$A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n,$$

no difiera del incremento correspondiente Δf de la función f por una cantidad infinitamente pequeña respecto a la distancia

$$r = \sqrt{\Delta x_1 + ... + \Delta x_n}$$

de un punto fijo $(a_1, ..., a_n)$ a un punto variable $(a_1 + \Delta x_1, ..., a_n + \Delta x_n)$. La función $\sum A_i \, \Delta x_i$ es la diferencial de f correspondiente a los incrementos Δx_i (Fréchet, 1937).

Fréchet muestra que las definiciones anteriores son todas ellas equivalentes; pero que su definición muestra de manera más explicita la naturaleza intima de la derivada. Además es importante llamar la atención en los criterios que guían sus generalizaciones, por lo menos los dos criterios antes mencionados: *simple y apropiado,* aunque de manera abstracta se constituyen en dos parámetros que identifican características buscadas o, al menos, son un punto referencial.

De esta manera Fréchet llega a la conclusión que, acorde con Hadamard, la diferencial de $f(x, y)$ es una función de x, y, dx, dy, donde x e y pueden verse como funciones de la variable u. Más concretamente: Una función $f(x, y)$ es diferenciable en el punto (a, b), si existe una función $g(x, y, dx, dy)$ designada por df, tal que para $u = u_0$ se tiene:

$$\frac{d}{du} f[x(u), y(u)] = \frac{g[x(u), y(u), x'_u du, y'_u du]}{du},$$

para $x(u_0) = a$, $y(u_0) = b$ y $x(u)$ y $y(u)$ son derivables en $u = u_0$.

Sin embargo, Paul Lévy descubre problemas en esta definición al encontrar una función que cumple lo anterior, pero que no cumple (4.3). En efecto, sea la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sqrt{\dfrac{y^2}{x^2+y^2}} & si \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esta función es diferenciable en el sentido precedente para $a = 0$, $b = 0$, tomando $g(x, y, dx, dy) \equiv f(x, y)$. Por otra parte se tiene:

$$\frac{f[(0,0)+h(1,0)]-f(0,0)}{h} = 0$$
$$\frac{f[(0,0)+h(0,1)]-f(0,0)}{h} = 0,$$

lo cual significa que, $f'_a = 0$ y $f'_b = 0$. Pero si se definen $x(u) = u^{1/2}$ y $y(u) = u$, para el punto $(0, 0)$ correspondería $u = 0$, y no se verificaría (4.3) para este caso particular.

El problema esencial es que todas las definiciones anteriores supeditaban la existencia de la diferencial a la existencia de las derivadas parciales. Paul Lévy se percata de esto y propone una salida conceptual al problema a través de la siguiente definición:

Una función $f(x, y)$ es diferenciable en el punto (a, b), si

1) La expresión
$$\rho = \frac{f(a+\lambda\Delta x, b+\lambda\Delta y)-f(a,b)}{\lambda},$$
tiene límite, con variaciones arbitrarias de Δx y Δy, cuando λ tiende a cero.

2) Este límite es de primer grado y homogéneo en Δx y Δy.

Sin embargo, Fréchet hace notar que está definición tampoco esta exenta de inconvenientes. Después de dar un contraejemplo, Fréchet enuncia la definición clásica de diferencial de una función de varias variables. De esta manera llega a su conocida definición de diferencial de una funcional:

> Una funcional U_f admite una diferencial para un argumento f_0, si existe una funcional $V_{\Delta f}$ (lineal con respecto al incremento Δf del argumento f_0)" que no difiere del incremento correspondiente $U_{f_0+\Delta f} - U_{f_0}$ de la funcional, más que una cantidad infinitamente pequeña respecto a la desviación Δ de f_0 y de $f_0 + \Delta f$.
> Si el argumento es una función continua en el intervalo I, podemos poner como desviación de de f_0 y de $f_0 + \Delta f$, el máximo de $|\Delta f|$ en I.
>
> Remarquemos que, si una funcional U_f admite una diferencial para una infinidad de argumentos $f(x)$, esta diferencial será una funcional que dependerá no solamente del incremento Δf sino del argumento f. Yo propongo para la representación, la notación: $\partial_{\Delta f} U_f$ (Fréchet, 1913).

Sin embargo, esta definición es incorrecta. El hecho es que las funcionales son definidas en espacios métricos lineales. Consideremos por ejemplo el espacio métrico lineal (actualmente se conocen como espacios de Fréchet), obtenido de la recta real con la métrica definida por $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$. La función identidad $f : (\mathbb{R}, \rho) \to (\mathbb{R}, \rho)$ definida por $f(x) = x$ en este espacio tiene como derivada en cero cualquier número λ según la definicion de Fréchet dada arriba, es decir para todo λ se tiene que

$$\frac{h - \lambda h}{\sqrt{|h|}} \to 0, \text{ cuando } \sqrt{|h|} \to 0.$$

Fréchet mismo dio como ejemplos solo métricas que son generadas por normas. En aquel tiempo, sin embargo, el concepto de norma no existía[4]; y tuvieron que pasar 14 años antes de que Fréchet llegara a su celebre definición de derivada en espacios normados.

4.0.4. La diferencial de Gâteaux

Simultáneamente por esta época René Gâteaux (1889 - 1914), otro estudiante de Hadamard, introdujo la siguiente definición de diferenciabilidad para funcionales la cual es adecuada para cualquier espacio lineal (Gâteaux, 1913). Gâteaux, en 1913, obtiene resultados importantes al abordar el proceso de extensión de la diferencial en su memoria póstuma (Gâteaux, 1919). La nueva teoría de Gâteaux llamó la atención de la comunidad matemática de la época y consiguió aplicarse en diferentes problemas. La diferencial de Gâteaux se define de la siguiente manera:

[4]Por lo menos no existía de manera formal y aceptada por la comunidad matemática

Sean X e Y dos espacios normados, Ω un abierto de X, x_0 un punto de Ω y f una aplicación de Ω en Y, tomemos h perteneciente a X y distinto de cero, se define $F(t) = f(x_0 + th)$ con $x_0 + th \in \Omega$ y supongamos que existe el límite

$$F'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t}$$

entonces se dice que $F'(0)$ es la variación de Gâteaux de f en x_0 respecto al incremento, que se designa con la notación $Vf(x_0, h)$; en la cual se puede observar que la definición anterior es la extensión natural del concepto de derivada direccional del cálculo, es decir la diferenciabilidad de Gâteaux en un punto es simplemente la diferenciabilidad a lo largo de todas las posibles lineas que pasan a través del punto. Además si se cumple que $Vf(x_0, h)$ existe para todo h y si es considerada como una función de h es lineal y continua, se dice entonces que V es la diferencial de Gâteaux de f en x_0.

La definición de Gâteaux es muy general ya que se pueden dar ejemplos de aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ que son diferenciables en el sentido de Gâteaux y no lo son en el de Stolz. En efecto, considere la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 \quad si \quad x = y^2 \wedge y > 0 \\ \\ 0 \qquad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Mostremos que F es diferenciable según la definición de Gâteaux en el punto $(0, 0)$. Aplicando la definicion de Gâteaux se tiene que:

$$\begin{aligned} F'((0,0),(h,k)) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{F((0,0) + t(h,k)) - F(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{F(th, tk)}{t} = 0. \end{aligned}$$

Pues si $F(th, tk) = 1$, tendríamos necesariamente que $h = tk^2$; $k > 0$ con t constante, dado que h esta fijado, lo que es claramente una contradicción pues t esta variando (tiende a 0). Así F es diferenciable según Gâteaux en el punto $(0, 0)$ pero no es diferenciable en el punto $(0, 0)$ según la definición de Stolz, ya que la función F no es continua en el punto $(0, 0)$.

4.0.5. Relación entre la derivada de Fréchet y la derivada de Volterra

Antes de ver la relación que existe entre la diferencial de Fréchet y la diferencial de Volterra, debemos recordar como Volterra definió su diferencial en el año de 1887. Volterra estudió la forma en que varía una funcional $F(f)$ cuyo argumento es una función continua, analizando los cambios que se presentaban en el argumento f. Volterra estudia el efecto de pequeños cambios en el valor de la función f cerca de un valor particular de x, y llegó a lo que el llamó *La derivada de F respecto a f en x,* que era una funcional $F'(f,x)$ cuyos valores dependen tanto de x como de f. Bajo ciertas condiciones razonables pero algo restrictivas, $F'(f,x)$ resultó ser continua en cada variable, y bajo esas condiciones Volterra obtiene la fórmula

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(f+\varepsilon g) - F(f)}{\varepsilon} = \int_a^b F'(f,x)\, g(x)\, dx, \tag{4.6}$$

donde $[a,b]$ es un intervalo finito en el cual las funciones f y g están definidas. De esta manera se puede escribir

$$F(f+\varepsilon g) - F(g) = \varepsilon \int_a^b F'(f,x)\, g(x)\, dx + \varrho, \tag{4.7}$$

una ecuación que define a ϱ, y se observa que ϱ/ε se acerca a cero cuando ε se acerca a cero. La expresión

$$\delta F = \varepsilon \int_a^b F'(f,x)\, g(x)\, dx \tag{4.8}$$

es llamada la primera variación de F, y $\varepsilon g(x)$ es llamada la variación de $f(x)$ denotada por δf.

Pasemos ahora al artículo de Fréchet publicado en 1913, en el cual escribe:

> Después de dedicar varias Memorias a la generalización en el Cálculo Funcional de la teoría de funciones continuas, me propongo ahora para extender aún más al Cálculo Funcional los principios fundamentales del cálculo diferencial. Primero recuerdo lo que significa Cálculo funcional. Lo sabemos, el propósito del análisis es estudiar las funciones que dependen de una o más variables numéricas. Pero las ciencias matemáticas o físicas también se presentan una gran cantidad de ejemplos de funciones cuya variable ya no es necesariamente un número, pero lo puede ser cualquier elemento, como curvas, superficies, funciones, etc. El cálculo funcional consiste en el estudio de las propiedades de estas funciones generales, que llamaremos, como el Sr. Hadamard, *funcionales*, para distinguirlos de las funciones ordinarias...
> ... Para generalizar los teoremas del cálculo diferencial, generalmente es necesario primero darse cuenta de la noción de derivada o diferencial. Podríamos basarnos, para llevar a cabo esta extensión, en el método utilizado en el Cálculo de Variaciones, que es solo un capítulo del Cálculo Funcional. Este es el camino seguido por el Sr. Volterra, que tuvo el mérito de desarrollar la primera teoría coherente de Cálculo diferencial funcional Consiste en operar con la variación funcional en el sentido de que escuchamos esta palabra en el cálculo de Variaciones (Fréchet, 1913).

De acuerdo a la cita anterior, debemos notar que la conclusión que se puede sacar en la línea de pensamiento de Fréchet respecto a la cuestión de la diferencial es cierta, en el sentido que toma en consideración las cuestiones esenciales que llevan a la extensión del cálculo funcional y su generalización al análisis funcional. La influencia de Volterra y Hadamard fue crucial. El problema de la diferencial vino a su mente como un problema sobre funcionales. Su solución del problema depende, tanto de la consideración de la equivalencia de las fórmulas (4.6) y (4.7), y de su revisión de los trabajos que encontró en los libros de texto de análisis sobre incremento Δf de una función $f(x, y)$, que pudo haber visto en varias ediciones del texto de C. Jordan's: *Cours d'Analyze.*

De acuerdo a lo anterior podremos observar la relación existente entre las maneras de definir la diferencial por parte de Volterra y de Fréchet. Si tomamos $g = V_{\Delta f}$ y $\partial_{\Delta f} U_f = dU(f, g)$, se debe cumplir que:

$$\lim_{M(g)\to 0} \frac{U(f+g) - U(f) - dU(f,g)}{M(g)} = 0,$$

donde $M(g)$ es el máximo valor de $|g(x)|$ sobre el intervalo I, en el cual está definida y es continua. La formula anterior implica la existencia de ε, definido por la ecuación:

$$U(f+g) = U(f) + dU(f,g) + \varepsilon M(g),$$

donde $M(g)$ es diferente de cero, talque ε se aproxima a cero cuando $M(g)$se aproxima a cero también. De lo anterior, Fréchet deduce:

$$\frac{d}{d\alpha}U(f+\alpha g) = dU(f+\alpha g, g).$$

Esto implica que U tiene una diferencial en $f+\alpha g$, lo cual nos lleva a conectar la diferencial de Fréchet con la variación de Voltera, pues:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{U(f+\varepsilon g) - U(f)}{\varepsilon} = dU(f,g).$$

4.0.6. La diferencial de Fréchet, otras generalizaciones

Después de algún tiempo de Gâteaux dar su definición de diferencial, se encontraron condiciones que implicaban la linealidad de la diferencial de Gâteaux[5]. Así, en el documento publicado en 1919, Percy John Daniell (1889 - 1946) mostró que esta linealidad se obtenía para funciones Lipschitzianas definidas en el espacio de funciones continuas en intervalos compactos cuya derivada de Gâteaux existía localmente:

> Sea $f : C \to \mathbb{R}$ una funcional real definida en el espacio de funciones continuas definidas en un intervalo $[a,b]$. Si f cumple la condición de Lipschitz
>
> $$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M \max_{a \leq \tau \leq b} |x_1(\tau) - x_2(\tau)|$$
>
> y si la diferencial de Gâteaux $\delta f(x,h)$ existe para todos los $h \in C$ y para todos los x en alguna vecindad $\max_{a \leq \tau \leq b} |x_1(\tau) - x_2(\tau)|$ del punto $x_0 \in C$, entonces $\delta f(x,h)$ es una funcional lineal en h (Daniell, 1919).

Posteriormente Paul Levy, otro estudiante de Hadamard, en su libro *Leçons d'analyse fonctionnelle* simplemente impuso la condición de linealidad de la derivada de Gâteaux con respecto al incremento:

[5]Ya que la diferenciabilidad de Gâteaux en un punto es simplemente la diferenciabilidad a lo largo de todas las posibles líneas que pasan a través del punto. Evidentemente la diferencial de Gâteaux no necesariamente tiene que ser lineal en h.

> Una funcional f definida en un espacio Lineal X es diferenciable en el sentido de Gâteaux-Levy en $x \in X$ si es Gâteaux diferenciable en este punto y la funcional $h \to \delta f(x,h)$ es lineal y continua (Lévy, 1922).

Las definiciones de Gâteaux-Lévy y Gâteaux se mantuvieron sin cambio para funcionales entre Espacios Vectoriales Topológicos. Aunque la clase de funcionales que tienen derivadas Gâteaux-Lévy es bastante amplia, el teorema de diferenciación de funciones compuestas no se cumplía. Fréchet en 1937 consideró el siguiente ejemplo: sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una función dada por $f(t) = (t, t^2)$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 \quad si \qquad x = y^2 \\ \\ 0 \qquad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función f es Gâteaux-Lévy diferenciable en 0 con derivada $f'(0) : t \in \mathbb{R} \to t(1,0)$ y la función g resulta Gâteaux-Lévy diferenciable en $f(0) = (0,0)$ con derivada 0 (la funcion constante cero); sin embargo la función compuesta $g \circ f$ resulta la identidad en $\mathbb{R}$ cuya derivada es 1 y no 0.

Así, surgió el problema de encontrar definiciones menos generales para las cuales el teorema de diferenciación de la función compuesta sea válido. Féchet abordó este problema en su programa de generalización. En el año de 1925 aplica su definición a los espacios distanciados vectoriales o espacios normados lineales, que él mismo había introducido años atrás y que se revelaron importantes en las investigaciones matemáticas.

Sea la función,

$$F : X \longrightarrow Y,$$

donde X, Y son espacios normados[6].

[6]En lenguaje moderno, se dice que un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ en el que se define un valor absoluto (generalmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es normado si en él se puede definir una norma, es decir, una aplicación $\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$, que verifica:

1. **No negatividad**. Para todo $\overrightarrow{x}$ de V su norma ha de ser positiva, y será cero si y sólo si $\overrightarrow{x}$ es el vector cero: $0 < \| \overrightarrow{x} \|$, si $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ y $\| \overrightarrow{x} \| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
2. **Homogeneidad.** Para todo $\overrightarrow{x}$ de V y para todo k de $\mathbb{K}$ se satisface que $\| k\overrightarrow{x} \| = |k|. \| \overrightarrow{x} \|$ donde $| \cdot |$ es el modulo o valor absoluto.
3. **Desigualdad Triangular.** Para todos $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ de V se cumple que $\| \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \| \leq \| \overrightarrow{x} \| + \| \overrightarrow{y} \|$.

Se dice que la función es diferenciable en un punto x_0, interior a X, si existe una transformación lineal T de X en Y, y una función escalar ε tal que:

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) - T(\Delta x) = \varepsilon \parallel \Delta x \parallel U,$$

donde U es un vector unitario en Y y $\varepsilon \to 0$, cuando $\parallel \Delta x \parallel \to 0$.

Por ejemplo, de acuerdo con la definición anterior de Fréchet el producto interno real $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable,

$$\langle x + h, y + k \rangle = \langle x, y \rangle + (\langle x, k \rangle + \langle h, y \rangle) + \langle h, k \rangle.$$

El término del medio es lineal en (h, k), y el ultimo podemos afirmar que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz satisface

$$\frac{|\langle h, k \rangle|}{\parallel h \parallel + \parallel k \parallel} \leq \frac{\parallel h \parallel \parallel k \parallel}{\parallel h \parallel + \parallel k \parallel} \leq \parallel h \parallel \to 0 \text{ cuando } (h, k) \to (0, 0).$$

Tenemos pues, que la diferencial que usualmente se define en los cursos de cálculo para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es exactamente la diferencial que definió Fréchet. Hay una diferencia importante entre el caso finito dimensional y el infinito dimensional. En el caso finito dimensional toda aplicación lineal es automáticamente continua, cosa que no es cierta en el contexto de los espacios normados de dimension infinita. Por ello Fréchet tiene que imponer en la definición que la diferencial sea continua. Debemos notar que por aquella época no estaba clara la noción de espacios normados. Fréchet llamó a sus espacios *vectoriels abstraits distanciés*.

Los espacios de Banach fueron introducidos por Stefan Banach (1892-1945) en su tesis doctoral de 1920, evidenciando que Banach aborda su disertación desde un punto de vista de la teoría no lineal, como el escribió posteriormente en 1932:

> Estos espacios (vectoriales complejos) son el punto de partida de la teoría de operaciones lineales complejas y de una clase, incluso mayor de operaciones analíticas,que presentan una generalización de las funciones analíticas ordinarias. Proponemos lo siguiente: exponer la teoría de otra forma (Banach, 1932).

Generalmente se denotará a $(V, \parallel \cdot \parallel)$ al espacio vectorial normado y, cuando la norma sea clara, simplemente por V.

Por otro lado en la aparición de su libro en 1951 bajo el titulo de *Les Problémes concrets d'analyse fonctionnelle*, Lévy dió una versión más complicada que su definición de 1922:

> Una funcional $f : X \to \mathbb{R}$ definida en un espacio métrico lineal X es Lévy-diferenciable en un punto $x \in X$ si ésta funcional es diferenciable en x en el sentido de Gâteaux-Lévy y satisface la condición de Lipschitz en ese punto, esto es, si existe una constante $M > 0$ tal que
>
> $$|f(x_1) - f(x_2)| < M$$
>
> para cualesquiera x_1, x_2 en alguna vecindad de x (ρ es la métrica en X) (Lévy, 1951).

Cabe notar, que la diferenciación de Lévy presenta inconvenientes, ya que esta definición aplicada aun para funciones reales de variable real no se reduce a la la diferenciación ordinaria. Ademas la condición de Lipschitz no es invariante bajo cambios de la métrica que inducen la misma topología. El mismo Lévy escribió:

> Esta definición es, sin duda, injustificadamente complicada... Lo mejor es continuar con la primera definición de Fréchet (Lévy, 1951).

Durante algún tiempo los espacios normados y la derivada de Fréchet satisficieron las necesidades de la comunidad matemática; pero a mediados de la década de 1930 es cuando los matemáticos llegan a considerar espacios vectoriales topológicos más generales que los espacios normados. Aquí el problema de generalizar la derivada otra vez atrajo la atención.

Por aquellos años, justo antes de la segunda guerra mundial y en los primeros años de la guerra, un gran número de artículos sobre esta interrogante aparecieron en Norteamérica y en Europa. El trabajo de los norteamericanos tuvo un carácter constructivo y en conexión con la generalización de la idea de aproximación lineal dada por Stolz, Pierpont, Young y Fréchet. En cambio en Europa se tuvo un carácter descriptivo; se basó en la idea de una carcaterización axiomática de la derivada, esencialmente en el requerimiento de que el teorema sobre la diferenciación de funciones compuestas debería mantenerse. Escrutemos en primer lugar esta segunda línea de tendencia. En 1923 Hadamard publicó una nota corta *Le probléme de la diferentielle said dans l'enseignement*. Citaremos el extracto más relevante de esta:

> Ya en 1904, en sus lecturas en el París Pedagogical Museum, Poincaré dijo que es tiempo de pensar en términos de derivadas y no de diferenciales. Me parece útil afirmar esto en la enseñanza y evitar las complicadas explicaciones que son dadas en conexión con las tradiciones clásicas acerca del símbolo d.
>
> $$dy = f'(z)\, dz \tag{4.9}$$
>
> $$dz = p\, dx + q\, dy \tag{4.10}$$
>
> ¿qué es lo que significa la ecuación (3.9)? Significa simplemente que si z (y en consecuencia $y = f(x)$) es una función de una variable arbitraria u, entonces cualquiera que sea la conexión entre x y u se puede escribir (probado que la derivada x'_u exista)
>
> $$\frac{dy}{du} = f'(x)\, \frac{dx}{du}$$
>
> el cual es el teorema de la diferenciación de funciones compuestas ¿qué es lo que significa la ecuación (4.10)? Significa que si x, y y así $z = f(x, y)$ son expresadas como funciones de una variable arbitraria independiente u, entonces, cualquiera que sea la expresión se puede escribir
>
> $$\frac{dz}{du} = \frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{du} + \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{du} = p\,\frac{dx}{du} + q\,\frac{dy}{du}$$
>
> estos son los únicos significados de las ecuaciones (4.9) y (4.10) (Hadamard, 1923).

Esta idea fue recuperada primero por Fréchet. Después de 14 años Fréchet dio una nueva definición de derivada (para funcionales en el espacio de funciones de una variable real):

> Decimos que una funcional $U[f]$ es diferenciable para $f = f_0$ en el sentido generalizado de Hadamard si existe una funcional $W[df, f_0]$ lineal en df tal que si la función $f(t, \lambda)$ es diferenciable con respecto a λ para $\lambda = 0$ y $f(t, 0) = f_0(t)$, entonces la función $U[f(t, \lambda)]$ de λ es diferenciable en λ para $\lambda = 0$ y tenemos que para $\lambda = 0$
>
> $$\frac{d}{d\lambda}\, U[f(t, \lambda)] = W[\frac{d}{d\lambda}, f_0]$$
>
> o en la notación de variaciones
>
> $$\delta\, U[f] = W[\delta f, f_0] \text{ (Fréchet, 1937).}$$

Aquí debemos entender que la función $f(t, \lambda)$ es diferenciable respecto a λ para cada t fijo y que $\frac{\delta f(t, \lambda)}{\delta\lambda}|_{\lambda=0}$ como función de t que pertenece al espacio de funciones en cuestión.

Fréchet mostró que para espacios de dimension finita la derivada de Hadamard-Fréchet (o derivada e el sentido generalizado de Hadamard) coincide con la derivada de

Stolz-Pierpon-Young; y dió un ejemplo (construido anteriormente por Paul Lévy para otros propósitos) para mostrar que en espacios normados la diferenciabilidad en el sentido generalizado de Hadamard no implica, en general, diferenciabilidad en el sentido de Fréchet. En particular la funcional $x \to \max_{0\leq\tau\leq 1} |x(\tau)|$ definida en el espacio $C(0,1)$ es Hadamard-Fréchet diferenciable en cada punto $x \in C(0,1)$, toma su valor máximo en un solo punto del intervalo $[0,1]$, pero no es Fréchet diferenciable en ningún punto.

Cabe destacar que a partir de los trabajos de Fréchet se abren nuevos campos de investigación, provenientes del proceso de definir una derivada general o derivada abstracta, como la diferencial en espacios topológicos, extensiones del teorema de Taylor y del valor medio, diferencial en espacios métricos afines y en grupos topológicos abelianos, diferenciales en espacios de Banach, diferenciales en espacios Pseudo-topológicos (Bucher, 2006). Luego de este periodo, se abren nuevos campos de investigación. En esta dirección apuntan algunos trabajos de M. Z. Nashed, especialmente su artículo sobre la diferencial en el análisis funcional no lineal (Nashed, 1971). En este artículo, Nashed realiza una sistematización de los desarrollos de la diferencial a partir de las generalizaciones más importantes que han hecho diferentes matemáticos de finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX. Su presentación abarca un largo y fecundo período que va desde el cálculo de variaciones hasta las derivadas asísntoticas y los operadores cuasi acotados. En principio, presenta las definiciones de Hadamard, Fréchet, Lévy y Gâteaux, estableciendo comparaciones e implicaciones.

Capítulo 5

Conclusiones

Para establecer la verdadera dimension del rol jugado por Volterra y Fréchet en la introducción de la derivada en espacios abstractos es conveniente tener en cuenta los protocolos de desarrollo conceptual y de producción matemática de la época.

Concepto de función alrededor de 1880

Respecto a los trabajos sobre funciones, podemos resaltar los trabajos de Bernhard Riemann (1826-1866) y Karl Weierstrass (1815-1897), cuyas teorías sobre funciones de variable real y compleja, dominaron la escena matemática entorno de 1880.

Riemann emprende la creación de una teoría de integración para funciones acotadas, esta teoría resultó ser mucho más rigurosa y más general que la teoría anterior de integración dada por Cauchy para funciones continuas[1]. El trabajo de Riemann de 1854 fue también el punto de partida de muchas actividades investigativas posteriores, investigaciones sobre series de Fourier y funciones reales abordadas por sus colegas George Cantor (1845-1918), Eduard Heine (1821-1881) en 1870, los italianos Guido Ascoli (1843-1896) en 1873 y Ulisse Dini (1845-1918) en 1897. En estos artículos se investigan cuestiones concernientes a la convergencia de funciones, integrabilidad, conjuntos de discontinuidades, etc., y son típicas en el desarrollo posterior de mayor rigor y generalidad en el tratamiento de funciones.

[1] La integral de Cauchy sólo era válida para funciones continuas en intervalos cerrados y acotados. Esto dejaba fuera muchas funciones, así que fue Riemann quien definió la integral que lleva su nombre, ampliando la clase de funciones integrables a las funciones continuas salvo en un número numerable de discontinuidades; pero la relación entre derivación e integración deja de ser válida en los puntos de discontinuidad.

Por otro lado podemos evidenciar que el exponente más influyente y promotor del rigor alrededor de 1880 fue Weierstrass. De hecho, a lo largo de su vida, Weierstrass hizo hincapié en la importancia de que en matemáticas se trabajara con formulaciones analíticas rigurosas, en contraste con Riemann, el cual usaba la geometría y la intuición proveniente de la física.

Weierstrass, es particularmente importante por su idea de aproximar una función continua mediante polinomios[2]. Dado que el teorema se refería a la aproximación uniforme sobre cualquier intervalo acotado I, dio una nueva perspectiva del *espacio*[3] $C(I)$ al mostrar que los polinomios son densos en $C(I)$.

Finalmente y no menos importante para la evolución del análisis funcional en sus etapas primigenias, fue el trabajo que realizó Weierstrass sobre el cálculo de variaciones. De manera específica, utiliza la técnica de configurar una familia de funciones de un solo parámetro[4]

$$f_\epsilon = f + \epsilon g$$

con el parámetro ϵ restringido a algún intervalo finito. Weierstrass introdujo una *distancia*[5] entre los miembros de esta familia, por lo tanto, se trata implícitamente cada función de este tipo como un *punto* en un *Espacio funcional*, una idea que está en la raíz del enfoque analítico funcional que se desarrollaría y consolidaría posteriormente alrededor de 1933 con Maurice Fréchet.

Concepto de *espacio* alrededor de 1880

Si el concepto de función seguía evolucionando en 1880, el de espacio era incluso más rudimentario. Sin duda, el gran desarrollo de las diversas geometrías durante el siglo XIX, comenzando con geometrías no euclidianas con Carl Gauss (1777-1855), Nikolái Lobachevsky (1792-1856) y János Bolyai (1802-1860), y que culminó en 1872 con el programa investigativo de Felix Klein (1849-1925), tuvo una profunda influencia en la idea de un espacio general. De manera muy llamativa, el concepto general de un espacio de dimensión arbitraria parece haber nacido a partir de ciertos problemas provenientes de la física, con los trabajos sobre mecánica celeste de Lagrange en 1788.

[2]Teorema de aproximación de Weierstrass de 1885.
[3]Cabe destacar que para esta época no se tenia un tratamiento riguroso de espacios abstractos.
[4]Weierstrass las llama funciones admisibles o curvas admisibles.
[5]En realidad, introdujo varias distancias

Pero respecto a los trabajos sobre geometría, aparecen los trabajos muchos mas influyentes de Riemann. Actualmente, la idea de espacio funcional apareció en su muy celebre tesis doctoral (Riemann, 1876). Por ejemplo, en su trabajo sobre funciones algebraicas y sus integrales introdujo los *Números de Betti*. Hizo esto primero para las superficies, y más tarde para variedades de cualquier dimensión, aplicando estos números a los períodos de integrales abelianas, y de ahí a un problema en el análisis de teoría de las integrales.

En su famosa disertación doctoral (Riemann, 1876), Riemann explicó en detalle el aspecto conceptual, el papel y carácter general del espacio en la geometría. Aquí formuló en pocas palabras la idea de espacios funcionales de dimensión infinita en la siguiente forma forma:

> Pero también existen variedades en las que la determinación de la ubicación no requiere un número finito sino una secuencia infinita o un continuo de determinaciones de cantidades. Una variedad tan grande. por ejemplo, se forma por las posibles determinaciones de una declaración para un dominio dado (Riemann, 1876).

Por otro lado, fue solo alrededor de 1870 que Richard Dedekind (1831-1916) y Georg Cantor (1845-1918) mostraron cómo construir el sistema de los números reales de manera rigurosa a partir de los números enteros. Sus construcciones proporcionaron bases sólidas para la *aritmetización del análisis* que tuvo lugar gracias al rigor proveniente de Weierstrass en el último cuarto del siglo XIX.

Dedekind, fue un pionero del álgebra abstracta moderna, reconoció que para aclarar las ideas topológicas de Riemann, la naturaleza del campo real tenía que ser analizada en profundidad. Comenzó a hacer esto en 1858, pero publicó sus ideas en forma definitiva solo en 1872 y en 1888. Dedekind también fue un precursor en el campo de los espacios métricos. De hecho, estudio algunas características peculiares de $\mathbb{R}^n$ sin apelar a la intuición geométrica.

Actualmente se reconoce que el análisis funcional depende de manera directa de la teoría de conjuntos fundada por George Cantor, un alumno de Weierstrass. Cantor fue motivado por el estudio de las teorías de Riemann. En su primer artículo sobre conjuntos, publicado en 1874, Cantor establece claramente distinciones, por primera vez, entre el infinito contable y el continuo, mostrando que el conjunto de todos los números reales es no numerable y que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable. Esto dio como corolario inmediato el hecho que casi todos los números reales son trascendentes. Más importante para nuestro trabajo, es que se abrió hasta nuevas perspectivas en el análisis también, iniciando una clasificación de conjuntos infinitos. Por lo tanto, dio sentido al concepto de una medida aditiva contable, para ser desarrollado luego por Émile Borel (1871-1956) y extendido por Henri Lebesgue (1875-1841) en su teoría radicalmente nueva sobre integración.

En 1877, Cantor hizo un segundo descubrimiento revolucionario: que la cardinalidad de el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es independiente de n, su dimensión. Esto constituyó una salida radical para llegar a una definición de la *dimensión* de un espacio como el número de coordenadas requeridas para especificar sus puntos, que había sido estándar antes de que Cantor probara que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ con cualquier $n \in \mathbb{N}$ tienen la misma cardinalidad. Cantor mismo fue sacudido por este descubrimiento de 1877, que era diferente de lo que había esperado encontrar, y que parecía socavar el concepto de dimensión en sí. Sin embargo, Dedekind tranquilizó a Cantor, señalando que debería ser posible demostrar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ con $m \neq n$ no son homeomorfos.

Además de definir la noción del conjunto derivado S' de un determinado conjunto S, y la noción asociada de un conjunto *perfecto*[6], todos los escritos anteriores eran rudimentarios y en gran medida intuitivos en la medida en que la topología del plano y de los espacios de dimensiones superiores se trata. De hecho, no fue hasta alrededor de 1910 que los fundamentos de la topología se formularon rigurosamente, incluso para espacios de dimensiones finitas. Por lo tanto, no es de extrañar que se perciba la vaguedad que rodeaba la noción de espacio de funciones de dimensión infinita en todo el siglo XIX, incuso luego de que las ideas de Cantor ganaran un amplio reconocimiento en la comunidad matemática.

Los tópologos franceses alrededor de 1900

Jacques Hadamard (1865-1963) y Maurice Frechet (1878-1973) jugaron roles preponderantes en el establecimiento del análisis funcional. Para apreciar sus primeras contribuciones, hay que recordar hasta qué punto París fue un centro de matemática brillante alrededor de 1900. El estudiante de Hermite, Henri Poincare (1854-1912) fue el líder mundial de la época como matemático; mientras que el yerno de Hermite, Emile Picard (1856-1941), Edouard Goursat (1858-1936), Hadamard y muchos otros habían logrado el reconocimiento internacional o estaban encaminados a lograrlo. El análisis complejo y las ecuaciones diferenciales provenientes de la física clásica formaron las principales corrientes de interés matemático. Pero la escena estaba a punto de cambiar, principalmente debido al

[6] Un conjunto es perfecto si satisface $S = S'$. Es decir, un conjunto es perfecto si es un conjunto cerrado tal que todos sus puntos son puntos de acumulación.

trabajo de Emile Borel (1871-1956), René Baire (1874-1932) y Henri Lebesgue (1875-1941). Estos notables matemáticos eran aproximadamente 30 años más jóvenes que los matemáticos italianos Ascoli, Arzela y Dini, y unos 10 años más joven que Volterra. A diferencia de sus antecesores italianos, fueron fuertemente influenciados por la teoría de conjuntos de Cantor, y la usaron para fundar nuevas teorías de la medida y de integración. Los primeros intentos de definir una *medida* de conjuntos fueron emprendidos por Peano en 1887, y en 1892 por las investigaciones de Camille Jordan sobre *contenido*, motivado por las dificultades conceptuales en la doble integración. Aunque el contenido de Jordan aún no era general, su idea de un enfoque de la teoría de la medida de la integral de Riemann tuvo gran influencia en Borel y más tarde en Lebesgue.

Borel, en el tercer capítulo de su libro *Leçons sur la théorie des fonctions*, de 1898 (Borel, 1898), incorpora su teoria de la medida que actualmente reconocemos como medida de Borel, mediante la cual introduce los llamados conjuntos borelianos[7]. La base fundamental del proceso de medir conjunto lineales reposa, para Borel, en la generalización de que la longitud de un intervalo $[a, b]$ será $b - a$. A partir de aquí empieza a ampliar el dominio de los conjuntos medibles. La medida de dos conjuntos disjuntos, y con medidas s y s', es $s + s'$. Más generalmente, la medida de la unión de una infinidad numerable de conjuntos disjuntos dos a dos satisface la siguiente propiedad

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

La idea que dio Borel para garantizar la existencia de esta medida, consistía esencialmente en el hecho de que, si una sucesión de intervalos $I_k = (a_k, b_k)$ cubre al intervalo $I = [0, 1]$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k - a_k > 1.$$

Para Borel, estos elementos corresponden a las propiedades fundamentales que debe cumplir una teoría de la medida útil:

[7]Estos conjuntos son obtenidos de conjuntos abiertos iterando los procesos de formación de uniones contables y diferencias

> La medida de la suma de una infinidad numerable de conjuntos disjuntos 2-2 es igual a la suma de sus medidas; la medida de la diferencia de dos conjuntos es igual a la diferencia de sus medidas[8].; la medida jamás es negativa; todo conjunto que no tiene medida nula no es numerable. Ello es entonces, expresamente entendido, lo que nosotros llamamos medida y declara los conjuntos que nosotros llamamos medibles (Borel, 1898).

De esta forma, el universo de los conjuntos borelianos quedaba determinado a partir de los intervalos y las operaciones de unión finita, uniones numerables y sus complementos. Borel finaliza esta sección mostrando que existen conjuntos que no son borel medibles. La existencia de conjuntos que no son borel medibles constituye una gran limitación de la teoría de Borel. Las investigaciones de Lebesgue toman esta dirección, constituyendo un teoría de la medida que extiende el concepto de conjunto medible a una gama más amplia de conjuntos que los borelianos (Recalde, 2018b).

El programa de investigación de Borel constituye un avance importante en la caracterización de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, como lo veremos con el siguiente teorema.

Teorema de Heine-Borel. Si una familia de conjuntos abiertos cubre a un conjunto cerrado y acotado S en $\mathbb{R}^n$, entonces existe un subconjunto finito de la familia que cubre a S.

Este teorema hizo posible que los matemáticos dejaran de pensar en cubrimientos finitos por intervalos como única opción para hallar el tamaño de un conjunto. Con la aparición del teorema de Heine-Borel se dieron cuenta de que para una clase amplia de ciertos conjuntos, todo cubrimiento numerable implicaba un cubrimiento finito, por lo que podría resultar quizás más provechoso considerar cubrimientos numerables y no finitos. Podríamos afirmar que el teorema de Heine-Borel fue uno de los elementos que inspiraron la transición del concepto de contenido al de medida. Así, por ejemplo matemáticos posteriores como Lebesgue introducen el concepto de conjunto de medida cero como aquellos que pueden ser recubiertos por una familia numerable de intervalos de longitud arbitrariamente pequeña.

Baire, en 1899, publica en su tesis doctoral *Sur les fonctions de variable reelles,* en ella caracteriza los límites de sucesiones convergentes de funciones continuas. Baire en su definición original dio una descripción general de conjuntos de primera y segunda categoría como sigue (Recalde, 2010):

[8] Aunque en la cita no se evidencia, es necesario aclarar que dicha afirmación se satisface si los dos conjunto son tales que uno no es subconjunto del otro.

Definición. Sea (X, τ) un espacio topólogico y $A \subseteq X$

- A es denso en *ninguna parte* en X si el interior de su clausura es vacío.
- A es de *primera categoría* o deficiente en X si es la unión de un número numerable de subconjuntos esparcidos[9].
- A es de *segunda categoría* en X cuando no es de primera categoría.

La definición del espacio de Baire puede establecerse modernamente como sigue:

Definición. Un espacio topológico X es llamado un espacio de Baire si todo conjunto abierto no vacío es de segunda categoría en X.

Baire, probó uno de los resultados básicos del análisis funcional, el *teorema de Baire*, el cual muestra que $\mathbb{R}$ es un conjunto de *segunda categoría* en sí mismo; resultado que posteriormente lo extendió a $\mathbb{R}^n$.

El trabajo de Baire es de gran relevancia, pues le da estatus ontológico a lo discontinuo como objeto matemático (Recalde, 2010), Baire le da importancia a las funciones discontinuas y toma como punto de partida la uno de los problemas cruciales en el siglo XIX como lo es la convergencia de serie de funciones, ademas, logra incorporar la teoría cantoriana de conjuntos como eje director en sus principales desarrollos.

Históricamente, la obra de Baire es muy importante, en tanto que evidencia que para el avance de las matemáticas, en muchas ocasiones es necesario un cambio de paradigma, en este caso el paradigma predominante era el rechazo hacia las funciones discontinuas y la tendencia hacia el estudio de las funciones continuas. Los estudios sobre funciones discontinuas eran considerados innecesarios para la escuela francesa del siglo XIX liderada por Cauchy, pues no se les asociaba una aplicación importante. Lo anterior impedía ver la riqueza presente en las funciones discontinuas y el vasto campo que ocupan, de hecho la cardinalidad del conjunto de las funciones continuas es igual a la cardinalidad de $\mathbb{R}$,mientras que la cardinalidad del conjunto de todas las funciones es mayor

Por otro lado, las nuevas técnicas de Borel se desarrollaron y repercutieron de manera importante en los trabajos de Lebesgue. En 1902 publica su tesis doctoral *Integrale, longueur, aire*, en la cual inaugura la teoría *moderna* de la integración, involucrando los conceptos de medida de Lebesgue, función medible e integral. En ella, Lebesgue estableció con gran

[9]Un conjunto es esparcido si no es denso en ninguna parte.

generalidad y elegancia su nueva integral. En particular, el demostró sus propiedades bajo los procesos de límite, como por ejemplo el siguiente resultado particular para funciones Riemnann integrables sobre un intervalo $[a, b]$.

Teorema. Sea $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $C[a, b]$[10] que converge uniformemente en $[a, b]$ a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces f es Riemann integrable sobre el intervalo $[a, b]$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Debemos notar que en Lebesgue la integración y la medida aparecen íntimamente conectadas, esto tiene que ver con la caracterización que él hace de la integrabilidad de una función en términos de la medida del conjunto de puntos de discontinuidad. La relación que allí aparece no solo es evidente en el enunciado mismo del teorema que Lebesgue establece sino en la demostración misma que lleva a cabo para sustentarlo. El enunciado afirma: "Una función es integrable si y sólo si el conjunto de puntos de discontinuidad tiene medida cero". Así la condición de integrabilidad es una consecuencia de la medibilidad y viceversa. En cuanto a la demostración, Lebesgue relaciona el criterio de integrabilidad de Riemann basado en el concepto de longitud combinada con el de medida exterior nula. Así, en un mismo razonamiento aparecen relacionados conceptos propios de la integración y la medida. No sobra recordar que la medida exterior cero que introduce Lebesgue resulta de sustituir recubrimientos finitos por numerables en el concepto de contenido exterior.

Por otra parte, Lebesgue por medio de seis axiomas desarrolla una teoría de axiomática de la integral. Lebesgue prueba que el uso de los primeros cinco conduce a la integral de Riemann, pero al intentar usar los seis axiomas se llega a una nueva definición de integral que exige definir la integral de una función característica como la medida del conjunto en el cuál esta no se anula. Así, encontramos de nuevo un vinculo entre la integración y la medida. De hecho, Lebesgue prueba que al definir la medida de un conjunto como la integral de su función característica esta satisface todos los postulados que, según él, debería tener una medida: en primer lugar la medida debe ser invariante por traslación; en segundo lugar, la medida de la reunión numerable de una familia de conjuntos disyuntos dos a dos, es igual a la suma de las medidas de los conjuntos; en tercer lugar, la medida del intervalo unidad es 1. De este modo, queda a su vez establecido que al lograr definir la integral en términos de la medida, resultaría en forma inminente la equivalencia entre la definición axiomática tanto de la integral como de la medida.

[10] $C[a, b]$ es el conjunto de funciones continuas en el intervalo $[a, b]$.

Para 1905, Borel, Lebesgue y Baire habían escrito monografías para una nueva serie iniciada por Borel[11], en la que se aplicó la *teoría de conjuntos* a conjuntos de funciones, y especialmente a los temas tratados en sus tesis. Además, Baire, Borel, Lebesgue y Hadamard publicaron una secuencia de cartas en el Boletín de la Sociedad Matemática de Francia en 1905, lo que ayudó a aclarar los fundamentos de la nueva teoría de conjuntos de Cantor.

Vito Volterra: precursor del cálculo funcional

La manera predominante de hacer matemáticas durante el siglo XIX influyó de manera evidente en los múltiples artículos que publicó Volterra entre los años de 1887 y 1921[12]. Durante su investigación Volterra se percata que tanto en las matemáticas como en las aplicaciones, existían relaciones de dependencia en las cuales el dominio de definición de la variable no era exclusivamente numérico. Conjuntamente con los problemas en donde se hace necesario optimizar una función de valor numérico $y = f(x)$[13], con mucha frecuencia surge, en los problemas provenientes de la física, la necesidad de hallar los los valores máximos y mínimos de un genero especial de magnitudes, que Volterra las llamó funciones que dependen de otras funciones, pero que después Hadamard las nombraría como funcionales. Así, en el ámbito de las matemáticas surgen funcionales como la longitud de arco $\mathcal{L}$ de una curva plana $y = f(x)$ que une a dos puntos dados $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$. La funcional longitud de arco $\mathcal{L}$, puede definirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\colon\ \{f \mid f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R},\ f' \text{ derivable}\} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ f &\longmapsto \mathcal{L}[f] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.\end{aligned}$$

El área $\mathcal{A}$ de cierta superficie puede definirse como una funcional, esta se determina de acuerdo a la función $z = f(x, y)$ de la superficie. Esta funcional queda definida por

[11]Esta nueva serie no publicada pretendía compilar las ideas claves y avances sustanciales de los resultados obtenidos en la tesis de dichos autores.

[12]El siglo XIX se encuentra caracterizado por diversas generalizaciones observadas en los trabajos de Cauchy (1827), Lobachevsky (1834), Dirichlet (1837), Riemann (1858), al emplear al objeto matemático función como la médula del análisis matemático. Ellos describían a la función con la particularidad de ser una correspondencia de tipo muy general.

[13]Determinar los máximos y mínimos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\colon \ \big\{f \mid f:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R},\ f\in C^2[a,b]\big\} \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ f \quad &\longmapsto \quad \mathcal{A}[f]=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Por otro lado, si seguimos las pistas de las motivaciones extra matemáticas se observa que los momentos de inercia, los momentos estáticos, son también funcionales, puesto que sus valores se determinan eligiendo una curva o superficie. De acuerdo a lo anterior, Volterra observa que en todos esos ejemplos se tiene una dependencia que es característica de las funcionales: a una función determinada le corresponde un número, mientras que para las funciones $y=f(x)$ a un número le corresponde otro número.

Como se presentó anteriormente, el programa de investigación de Volterra está motivado por la resolución de problemas provenientes de ámbitos puramente internos de la matemática y por problemas provenientes de la física matemática. Cabe destacar que Volterra aborda dichos problemas con los *lentes* del cálculo de variaciones. Es decir, aborda estos nuevos problemas definiendo las funciones que dependen de otras funciones y usando razonamiento analógico respecto de la forma de pensar los problemas del cálculo diferencial y del cálculo de variaciones, actúa de manera pragmática, buscando dar solución a problemas concretos. Para ilustrar lo dicha anteriormente presentaremos un cuadro comparativo en el cual se devela el programa de investigación de Volterra (Ver anexo II).

Volterra se trazó como objetivo general de su programa investigativo[14] extender a las funcionales los conceptos de derivada y de diferencial. Específicamente, en la parte central de su nota (Volterra, 1887), Volterra se basa en la noción de variación de una función que depende de otra función y denota con el símbolo σ al termino de primer orden de la variación Δ de y para una pequeña variación en la variable.[15] Aquí llamamos la atención sobre la importancia del enfoque adoptado por Volterra, ya que este enfoque tuvo lugar dentro del desarrollo general del análisis matemático en un momento en el que se trataba de definir un cálculo diferencial para las funciones de varias variables reales, a partir de analogía con lo ya conocido para funciones de una variable real. De acuerdo a lo anterior, el trabajo que realizó Volterra durante las ultimas décadas del siglo XIX, no es un tratado en el cual se pretendía conformar una noción especifica de la diferencial de una funcional, ni mucho menos la de definir cuando una funcional es diferenciable tomando como base

[14]Lo cual se nota especialmente en las tres notas que conforman su artículo de 1887 (Volerra, 1887a).
[15]Que aquí es una función.

una generalización de los mismos conceptos proveniente de los resultados del análisis clásico para funciones de varias variables.

El artículo (Volterra, 1887) es, sin duda, un hito en el desarrollo del análisis funcional. Comenzando con la incorporación de un nuevo concepto matemático, Volterra construyó por primera vez un nuevo cálculo diferencial que le permitió visualizar derivadas de orden superior y llegar a tener una fórmula de Taylor en este nuevo marco general. Volterra revisó su sistema de suposiciones una y otra vez, por lo tanto, el marco presentado en (Volterra, 1887) seguía siendo provisional. Aparte de las ambigüedades en la elección del simbolismo y la terminología que hemos subrayado y que dista del simbolismo y lenguaje moderno, vemos que Volterra se percata de que es necesario replantear algunas condiciones un poco restrictivas sobre la derivada; estas precisiones se evidencian en sus sucesivas publicaciones posteriores. Propiedades y condiciones que permitirán garantizar la existencia de la primera derivada de un funcional.

De esta manera podemos afirmar que la figura de Volterra fue clave para la creación y desarrollo del análisis funcional como se puede colegir de un seguimiento de su trabajo. Mientras que en el siglo XX las funcionales se convirtieron en nociones matemáticas muy usadas, en la última década del siglo XIX aún estaban en su etapa temprana de desarrollo. En la introducción a su artículo (Volterra, 1889), Volterra declaró que las funciones de líneas surgen de varias preguntas provenientes de la física y también pueden estar relacionadas con preguntas del análisis. En este artículo se propuso mostrar cómo se podrían usar las funcionales en la teoría de funciones de variables complejas. En un artículo anterior (Volterra, 1887), Volterra ya había mencionado el uso de funciones de líneas para generalizar la definición de función compleja de Riemann. En efecto, él escribió que las consideraciones de Riemann en referencia a un espacio bidimensional se puede extender a espacios tridimensionales siempre que en lugar de funciones definidas en dicho espacio, uno comienza con funciones que dependen de las líneas en este espacio.

Posteriormente en su artículo (Volterra, 1891), Volterra muestra que es posible usar las funciones de línea para extender a las integrales dobles la teoría del cálculo de variaciones de Jacobi-Hamilton:

> El procedimiento de Jacobi-Hamilton se basa en una simple integral (cuya variación debe hacerse nula) considerada como una función de sus límites y de la valores arbitrarios asignados a las funciones desconocidas en los límites en sí mismos. . . Si se pasa de integrales simples al caso de integrales dobles, en lugar de los dos límites de la integral, tenemos una o más líneas que forman el límite del área de integración. (Volterra, 1891).

Es en este tipo de contexto es que las funciones de líneas entran en juego, lo que permite la construcción de un elemento análogo a la función característica establecida en la teoría de Hamilton-Jacobi, y que extiende el concepto de integrales múltiples. En un artículo posterior (Volterra, 1897), Volterra explica cómo las funciones de líneas hacen posible desarrollar un visión general del problema de la suma para funciones elípticas y la conexión con las ecuaciones diferenciales parciales. En efecto, Considere la siguiente suma de integrales múltiples:

$$J = \iint_{\alpha_1} \frac{dydz}{\sqrt{\frac{\beta_2}{\lambda}z^2 - \frac{\beta_3}{\lambda}y^2 + \beta_1}} + \iint_{\alpha_2} \frac{dzdx}{\sqrt{\frac{\beta_3}{\mu}x^2 - \frac{\beta_1}{\mu}z^2 + \beta_2}} + \iint_{\alpha_3} \frac{dydz}{\sqrt{\frac{\beta_1}{\nu}y^2 - \frac{\beta_2}{\nu}x^2 + \beta_3}},$$

con la condición $\lambda + \mu + \nu = 0$. El principal teorema demostrado por Volterra en (Volterra, 1897) establece que esta suma es constante cuando los dominios de integración están limitados por las proyecciones $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sobre los tres planos coordenados de una curva dibujada en la superficie algebraica con ecuación

$$\lambda x\sqrt{\frac{\beta_2}{\lambda}z^2 - \frac{\beta_3}{\lambda}y^2 + \beta_1} + \mu y\sqrt{\frac{\beta_3}{\mu}x^2 - \frac{\beta_1}{\mu}z^2 + \beta_2} + \nu z\sqrt{\frac{\beta_1}{\nu}y^2 - \frac{\beta_2}{\nu}x^2 + \beta_3} = C.$$

Volterra luego hace la siguiente observación: la existencia de una solución a la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

puede interpretarse como la condición de existencia de una función de línea de primer orden

$F[(L)]$ de tal manera que sus derivadas de superficies[16]

$$\frac{\partial F}{d(y,z)}, \frac{\partial F}{d(x,z)}, \frac{\partial F}{d(x,y)},$$

son dadas respectivamente por X, Y y Z. Ahora tal función de línea F es constante para cualquier línea L sobre la superficie Σ definida por la ecuación $f =$ constante, donde f es solucion de la ecuación diferencial parcial

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

De lo anterior podemos observar un posible vínculo entre la relación aditiva que implica integrales múltiples y algunas propiedades de algunas funciones de línea. Sin embargo, Volterra no es tan preciso sobre la conexión que mencionamos anteriormente. También es interesante observar que en (Volterra, 1897), Volterra cita un largo párrafo de una obra similar de Picard y extractos de cartas que muestran que los dos matemáticos estuvieron en contacto con respecto a esta interrogante:

> Con respecto a esto, me complace presentar a la Academia un extracto de dos cartas que nuestro ilustre miembro correspondiente, el Sr. Picard, me envió después de la comunicación que le envié de propuestas anteriores y que él me autorizó a publicar: ... Creo que reconozco en la pregunta que usted me muestra algo que parece relacionarse con un estudio que comencé pero que nunca he entrado en profundidad y que nunca he publicado (Volterra, 1897, p.333.).

La reconstrucción histórica anterior, sobre la generalización de la diferencial hecha por Volterra, ha puesto en evidencia varios problemas sobre los cuales hemos llamado la atención, en relación con aspectos particulares del proceso de generalización de Fréchet.

Maurice Fréchet y la creación del análisis funcional

Ahora bien, si es cierto que las definiciones y algunos resultados, del trabajo de Volterra, no corresponden rigurosamente a los procedimientos analíticos que nos son familiares, ello no puede ser argumento para disminuir su importancia histórica. Este es un aspecto que

[16] definidas estas derivadas en (Volterra, 1887b).

ha llamado la atención de algunos historiadores italianos (Nurzia, 1987), (Accardi, 1992) y (Fichera, 1994), quienes contradicen la afirmación que hace Dieudonné en su libro de historia del análisis funcional (Dieudonné, 1989), en el cual dice que a Volterra se le ha sido atribuido una "extremada importancia histórica".

Con respecto a una relativización tan categórica del rol de Volterra en los orígenes del cálculo funcional, como la expresada por Dieudonné, vale la pena recordar que ni Hadamard ni Fréchet, jamas desconocieron la importancia de la contribución de Volterra. El problema de fondo tiene que ver con las concepciones epistemológicas, en la escogencia de los objetos de estudio, y los estilos de investigación que identifican cada uno de los programas. La correspondencia entre Volterra y Fréchet, estudiada con detenimiento por Laura Nurzia, constituye una referencia importante, para entender estos aspectos (Nurzia, 1987). La relación epistolar entre los dos, se inicia hacia 1904, a partir de una misiva de Fréchet a Volterra, en la cual el entonces joven estudiante Fréchet, encaminado a la preparación de su tesis doctoral, le expone algunas reflexiones sobre el análisis funcional. Este intercambio abarca un periodo de mas de treinta años, durante el cual se entabla una fructífera discusión sobre cual debe ser la mejor manera de definir la derivada. En primera instancia, Fréchet se adhiere a la crítica de Hadamard, en el sentido de que la definición de Volterra tiene serias limitaciones, pues habría casos en los cuales no se podría aplicar. El argumento principal de Fréchet, enmarca dos aspectos importantes. Por un lado, reivindica la idea de encontrar un principio único y general, que permita no sólo estar acorde con el orden lógico, sino que permita asegurar el futuro de la teoría (Fréchet, 1914). Volterra insiste en su definicion de 1887, argumentando que las críticas de Hadamard, ya las ha resuelto en su segunda comunicación, en la cual tiene en cuenta los puntos excepcionales que pueden hacer fallar su definición (Volterra, 1954). Aparentemente, se presenta aquí un típico caso que va mas allá del orden epistemológico. Sin embargo, a pesar de que la definición de Fréchet ha sido la de mayor trascendencia, es interesante tener en cuenta el acercamiento que hace Nurzia (Nurzia, 1987). Para ella, la cuestión fundamental no es establecer valoraciones en uno u otro sentido, sino de presentar puntos esenciales del conflicto que nos permitan entender la cuestión desde perspectivas mas amplias. No se trata de tomar partido en uno u otro sentido, sino mejor de comprender que en el caso particular estamos frente a dos formas de abordaje y a dos tipos de programas de generalización.

Aclaremos un poco más detalladamente en algunos aspectos de la polémica. Desde 1887, el mismo año de la publicación de las dos notas de Volterra, sobre la diferencial, Hadamard llama la atención sobre algunas insuficiencias de la generalización propuesta por Volterra. En su articulo *Sur les Dérivées des functions de lignes* (Hadamard, 1902), presenta algunos casos de funcionales en las cuales no se puede aplicar la definición de Volterra, incluyendo el estudio de los puntos excepcionales, el cual Volterra consideraba como una generalización de sus resultados.

Reconociendo la novedad de la línea de investigación de Volterra, Hadamard orienta en esta dirección a algunos de sus alumnos, entre ellos a Fréchet, Gâteaux y Paul Levy (Hadamard, 1929). En este contexto, Hadamard formula un enfoque que Fréchet va a retomar mas adelante, y que consiste en considerar sólo a las funcionales a las cuales se las puede extender los métodos del análisis infinitesimal, es decir a todas las funcionales $v(y)$ cuya variación sea una funcional lineal de y. Como vemos, el camino que llevará a Fréchet al análisis general, aunque tenue, empieza a tomar forma.

Esto nos remite nuevamente al comienzo de nuestro análisis, pero ahora sí con nuevos elementos de juicio para entender un poco más profundamente a Fréchet en su búsqueda de principios generales que le permitan, como él mismo lo expresa, pararse desde un punto de vista lógico de la teoría y ver como se asegura su desarrollo a través de la identificación de un principio único, como elemento clave de la generalización que va mucho más allá de la mera analogía o extensión (Fréchet, 1914).

Como hemos notado, el joven Fréchet fue un re-lector de las funciones de lineas definidas por Volterra, mientras que que simultáneamente iba forjando su programa de investigación, inauguraba el análisis funcional sobre espacios de naturaleza cualquiera. De esta manera Fréchet de manera rápida y decididamente se propuso construir una nueva ala de edificio matemático a la cual él denomino *análisis general* y el cual no constituye una culminación del programa de investigación adoptado por Volterra. Justamente lo expresado anteriormente se constituye como el punto clave para entender la tension presente estos dos programas de investigación adoptados por estos dos grandes matemáticos.

Por otro lado, en el contexto del programa de investigación de Fréchet debemos hacer un alto para resaltar un proceso de pensamiento necesario para entender las concepciones epistemológicas de Fréchet, este proceso es el de *dasaxiomatización* (Arboleda, 1998, 2012). La idea de Fréchet sobre la manera en que se hacen matemáticas y su relación con la experiencia, consiste en postular que las ideas matemáticas son producto de una construcción intelectual a través de un proceso en el cual aparecen esquematizaciones sucesivas provenientes de la realidad concreta. en este sentido en (Arboleda y Recalde, 2002, p.60.) se precisa lo anterior:

> Fréchet fijó una posición critica frente a las dificultades de utilizar el método axiomático-deductivo en la investigación y la enseñanza de las matemáticas. Esta oposición signa prácticamente toda su reflexión filosófica, histórica o educativa sobre las matemáticas. Al tiempo que acepta la función del método axiomático en cuanto a fundamentar la matemática en un número reducido de principios simples, Fréchet subraya la importancia de verificar en la enseñanza y en la investigación el acuerdo entre la definición lógica de un objeto y su representación experimental; a esta situación la llamó "desaxiomatización".

De acuerdo a lo anterior, nos centraremos en lo que nos parece la contribución mas creativa y original al análisis, es el caso de la teoría de la diferencial abstracta. Para mostrar esto Fréchet al final de su vida realiza un análisis comparativo de distintas definiciones de este concepto matemático. A continuación mostraremos algunas consideraciones claves para distinguir las diferentes ideas de Fréchet en su programa de investigación:

1. Fréchet adopta un proceso diferente a la manera habitual de pasar de lo particular a lo general para introducir la diferencial abstracta.

2. Para instaurar la definición de diferencial abstracta Fréchet vuelve del caso general de los espacios abstractos al caso particular del plano. Esto reafirma la importancia que tenían las instancias de verificación de una teoría en Fréchet.

3. Por otro lado observamos que Fréchet presenta otra modalidad de verificación de la teoría de la diferencial abstracta, esta modalidad la uso para aplicarle las propiedades de la diferencial de una funcional a transformaciones definidas en espacios de Banach.

4. Finalizando, se puede observar que la aplicación de sucesivos esquemas que dieron lugar a la instauración de la diferencial abstracta, constituyen una forma de generalización en matemáticas que es característica de el nuevo concepto matemático llamado diferencial; pero que nos permiten tener evidencias aplicables de distintos tipos de extenuaciones y generalizaciones en matemáticas.

Cabe notar que el programa de investigación seguido por Fréchet, nos muestra, ademas de lo antes expuesto, una serie de pasos que nos dan un poco de claridad frente a la manera en como se hace matemáticas. Es así que en el proceso de consolidación de la teoría de la diferencial abstracta, los contraejemplos jugaron un papel preponderante para la comprensión de la teoría, ya que las sucesivas restricciones, cambios de paradigmas y distintos métodos de validación permitieron refinar la teoría. En el Anexo III, a manera de síntesis se presentarán los diferentes estadios de la definición de diferencial desde Volterra hasta Fréchet.

Por otro lado, simultáneamente a Fréchet, S. Banach presenta en 1920 su tesis titulada *Sur les Opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équatíons intégrales* publicada en 1922; en la introducción se puede leer:

> El objetivo de este trabajo es demostrar algunos teoremas que son ciertos para diferentes espacios funcionales (champs fonctionneles). En lugar de probar los resultados para cada espacio funcional particular, he optado por un enfoque diferente: considero en general un conjunto de elementos abstractos, para los que postulo una serie de propiedades y demuestro los teoremas para esos conjuntos. Entonces pruebo que distintos espacios funcionales particulares. en los que estoy interesado, satisfacen los axiomas postulados... (Banach, 1920, p. 134.).

Los axiomas que postula Banach son los que modernamente se conocen como los axiomas de espacios normados completos o espacios de Banach. Mientras que los principales teoremas que están consignados en la tesis de Banach son *el principio de acotación uniforme*[17] y la forma general del *principio de contracción*[18] en un espacio métrico completo, que le permitieron obtener demostraciones simples de varios importantes resultados. Hay que resaltar la similitud entre Fréchet y Banach en relación a la forma en que dirigieron sus programas de investigación, sobre todo en la manera tan actual que emplean para resolver una serie de problemas concretos, enmarcándolos en contextos abstractos y aplicando métodos generales, ya sean de índole algebraico o topológico para resolverlos.

Para finalizar, con este panorama sobre la teoría de la diferencial abstracta, establecimos que su estudio puede ofrecer una experiencia de aprendizaje de las matemáticas que permita comprender la génesis de objetos matemáticos determinados, pero esto impone unas exigencias particulares a los docentes de Matemáticas, como la adaptación del docente a un discurso especial, en tanto:

- Su objeto son las funcionales definidas en espacios de naturaleza cualquiera, es decir la abstracción que procede de problemas específicos provenientes de la realidad concreta.

[17] El principio de acotación uniforme nos dice que si E es un espacio métrico completo completo y Φ una familia de funciones continuas de E en $\mathbb{R}$, además Φ está puntualmente acotada en E, entonces Φ está uniformemente acotada en un subconjunto abierto no vació de E

[18] El principio de contracción de Banah nos dice que si (X, d) es un espacio métrico completo y si la función $\phi : X \to X$ es una contracción, entonces ϕ tiene un único punto fijo.

- El tratamiento es de tipo abstracto, por lo cual no se puede disponer de registros de representación geométrico accesible a nuestra intuiciones.
- La comprensión e interpretación de los conceptos centrales de la teoría no es trivial.
- La comprensión de los enunciados de las proposiciones de la teoría en general no se logra solamente con el estudio de su enunciado.

Este marco de exigencias constituye una potente base para realizar un trabajo de naturaleza didáctica, para explicitar, estudiar o reflexionar sobre: los niveles de abstracción implicados en la comprensión de una teoría que tiene un alto grado de sofisticación, Los distintos tipos de razonamiento en matemáticas como el analógico, el inductivo y los procesos de extensión y de generalización; la excesiva presencia de lo numérico en los currículos de matemáticas, las dificultades que la ausencia de registros de representación imponen a la comprensión, el hecho de poder construir una teoría robusta sobre definiciones no precisas o abstrusas, la diferencia entre comprender una propiedad y entender su demostración, advirtiendo las interrelaciones posibles entre estas acciones. Lo anterior pretende ser un insumo de tipo didáctico necesario que permita la reflexión en los docentes de matemáticas y los matemáticos en formación en torno a la comprensión de teorías matemáticas, caso particular el de la diferencial en espacios abstractos.

Apéndice A

Anexo I: Red de causalidad entorno al programa investigativo de Volterra

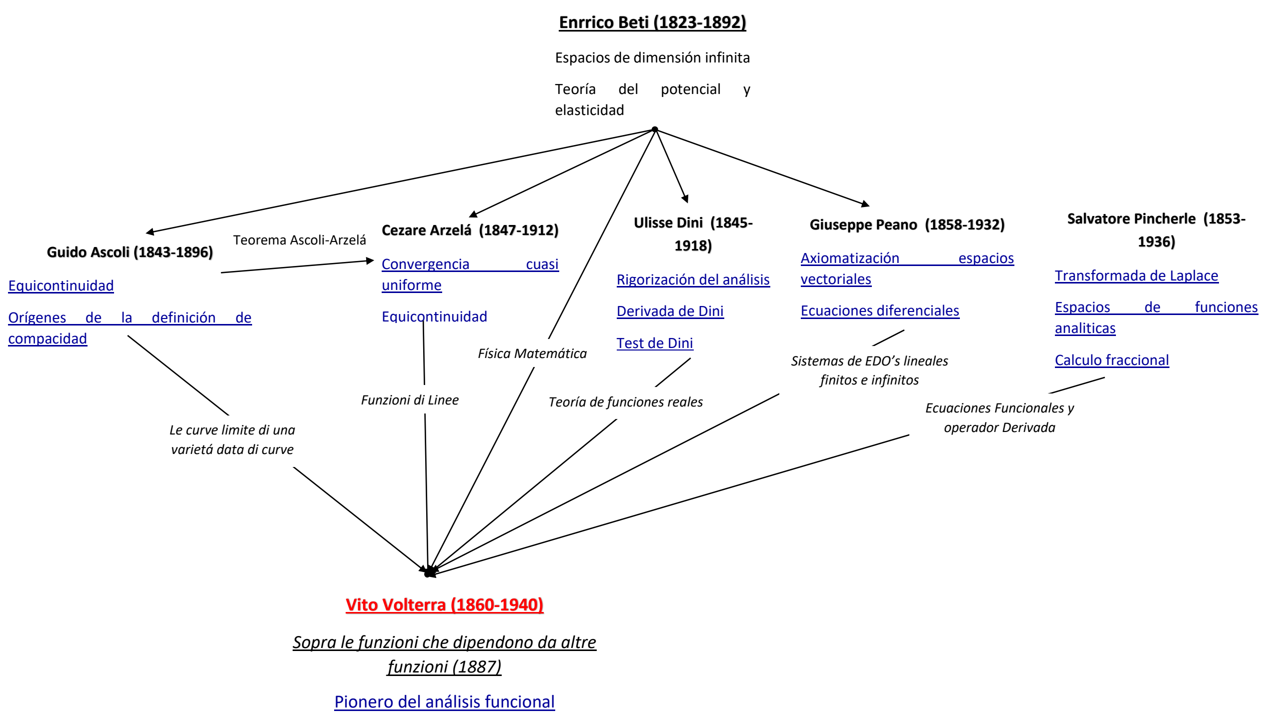

Figura A.1: Relación entre conceptos claves entorno al surgimiento del análisis funcional

Apéndice B

Anexo II: Volterra

Cálculo diferencial	**Programa de Volterra**
1. La variable y es función de la variable x, y se designa como $y = f(x)$, si a cada valor de x perteneciente a cierto dominio de variación de x le corresponde un único valor de y.	1. Cuando una cantidad F depende de los valores de una función $f(x)$ definida en cierto intervalo $(A..B)$, se dirá que F depende de $f(x)$ entre $(A..B)$ y ello se representa por: $$F = F[f(x)\|.$$
2. Se llama incremento Δy de la variable y, a la diferencia entre dos valores, $\Delta y = y - y_1$. Si y es la variable dependiente, $dy = \Delta y$.	2. Se llama incremento o variación, ΔF de $f(x)$ a la diferencia entre dos valores de las funcionales $$\Delta F = F[f(x) + g(x)] - F[f(x)].$$
3. La función $f(x)$ es continua en $x = x_0$, si para todo ϵ positivo existe un $\delta > 0$, tal que si $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$, es $\|x - x_0\| < \delta$.	3. Sea $F = F[f(x)]$, diremos que F es continua, si al dar a $f(x)$ una variación $g(x)$ tal que en valor absoluto $g(x)$ siempre es menor que σ, la variación correspondiente a F puede hacerse inferior a ϵ , pequeño y arbitrario.

Continuación de la tabla en la siguiente página

<table>
<tr><th>Cálculo diferencial</th><th>Programa de Volterra</th></tr>
<tr><td>4. Se llama función lineal a la función $l(x)$ que satisface las siguientes condiciones: $l(cx) = cl(x)$, donde c es una constante arbitraria y $l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2)$</td><td>4. Se llama funcional lineal a la funcional y que satisface $y[c\varphi(x)] = cy[\varphi(x)]$, donde c es una constante arbitraria y $y[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] = y[\varphi_1(x)] + y[\varphi_2(x)]$.</td></tr>
<tr><td>4. Si el incremento de la función
$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$
puede representarse en la forma
$$\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\Delta x$$
donde $A(x)$ no depende de Δx y $\beta(x, \Delta x)$ tiende a 0 cuando Δx tiende a 0, entonces la función se llama derivable, y la parte $A(x)\Delta x$ del incremento, lineal con respecto a Δx, se llama diferencial de la función y se denota por df. Dividiendo por Δx y pasando al límite cuando $\Delta x \longrightarrow 0$, se obtiene que $A(x) = f'(x)$ y, por lo tanto,
$$df = f'(x)\Delta x.$$</td><td>4. Sea F una funcional definida en el espacio de funciones continuas sobre el intervalo $(A..B)$, su variación puede expresarse como una integral del tipo
$$\delta F[f(x)] = \int_A^B F'[f(x), t]\, \delta f(x)\, dt.$$
La operación de integración generaliza la suma utilizada en la expresión del diferencial referido anteriormente, δF representa la variación del funcional F generado por la variación δf de la variable independiente, y F' denota lo que Volterra llamó la derivada funcional de F.</td></tr>
</table>

Tabla B.1: Analogía entre el programa de investigación de Volterra y el cálculo diferencial clásico.

Apéndice C

Anexo III: Distintas definiciones de derivada

Lista de definiciones

La siguiente tabla da una lista de todas las definiciones de derivadas mencionadas en la sección 4. En algunos casos las definiciones dadas originalmente por los autores consideraban espacios de funciones reales o el campo de los números reales $\mathbb{R}$, las siguientes definiciones consideran funciones definidas en general en un espacio vectorial.

- **E** Aplicaciones C^1 de un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ (conjunto de líneas).
- **E.V.T.** Espacio Vectorial Topológico.
- **E.N.** Espacio Normado.
- $\mathcal{L}(X, Y)$ Espacio de todas las funciones Lineales y continuas de X en Y.
- $\mathcal{H}(X, Y)$ Espacio de todas las funciones homogéneas de primer grado de X en Y.
- U_X Familia de todas las vecindades del cero en X.
- U_Y Familia de todas las vecindades del cero en Y.

<table>
<tr><th>Nro.</th><th>Autor y año</th><th>X</th><th>Y</th><th>Espacio</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>Volterra (1887)</td><td>E</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>$\{y : E \to \mathbb{R}\}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\delta y[\varphi(x)] = \int\limits_A^B y'[\varphi(x), t]\ \delta\varphi(x)dt$, y la derivada es $y'[\varphi(x), t]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Stolz (1893), Pierpont (1905) y Young (1910)</td><td>$\mathbb{R}^n$</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>$\mathcal{L}(X, Y)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_n + h_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \epsilon_i\right) h_i$, donde
$\epsilon_i \to 0$ cuando $\|h\| = \text{máx}\,\{|h_1, |h_2|, ..., |h_n|\} \to 0$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>Fréchet (1911): Stolz-Pierpont-Young-Fréchet</td><td>$\mathbb{R}^n$</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>$\mathcal{L}(X, Y)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_n + h_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \epsilon_i\right) h_i$, donde
$\epsilon_i \to 0$ cuando $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + ... + h_n^2} \to 0$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>Gâteaux (1913): Gâteaux diferenciabilidad</td><td>E.V.T</td><td>E.V.T</td><td>$\mathcal{H}(X, Y)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\forall h \in X$ el límite $\delta f(x, h) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$ existe.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>Lévy (1923): Gâteaux-Lévy diferenciabilidad</td><td>E.V.T</td><td>E.V.T</td><td>$\mathcal{L}(X, Y)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\forall h \in X$ el límite $\delta f(x, h) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$ existe. Además, la funcional
$h \longmapsto \delta f(x, h)$ es lineal y continua.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td>Fréchet (1925): Fréchet diferenciabilidad</td><td>E.N</td><td>E.N</td><td>$\mathcal{L}(X, Y)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Existe una función lineal y continua $\mathcal{A} : X \to Y$ talque $f(x + h) - f(x) = \mathcal{A}(h) + r(h)$ donde
$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \to 0$ cuando $\|h\| \to 0$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">7</td><td>Fréchet (1937): Hadamard diferenciabilidad</td><td>E.V.T</td><td>E.V.T</td><td>$\mathcal{L}(X, Y)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$U[f]$ es diferenciable en f_0 si existe una funcional $W[df, f_0]$ lineal en df talque si la función $f(t, \lambda)$ es diferenciable con respecto a λ para $\lambda = 0$ y $f(t, 0) = f_0(t)$, entonces la función $U[f(t, \lambda)]$ de λ y tenemos que para $\lambda = 0$ $\frac{d}{d\lambda}U[f(t, \lambda)] = W[\frac{d}{d\lambda}, f_0]$</td></tr>
</table>

Tabla C.1: Distintas definiciones de derivada.

Bibliografía

[1] Accardi, Luigi. (1992). Vito Volterra and the development of functional analysis. *Accademia Nazionale dei lincei*, Roma, pp. 151-173.

[2] Apostol, Tom M. (1996). *Análisis matemático*. Barcelona: Reverté.

[3] Arboleda, Luis Carlos. (1984). Sobre los fundamentos de la teoría de los espacios compactos. *Asclepio*, Madrid, Vol. 35, 123-157.

[4] Arboleda, Luis Carlos. (1998). Las concepciones socioepistemológicas de Fréchet en sus investigaciones sobre la teoría de los espacios abstractos y la topología general. *8th International Congress on Mathematical Education*. Selected Lectures.

[5] Arboleda, Luis Carlos. (2012). El problema didáctico y filosófico de la desaxiomatización de las matemáticas. *Revista colombiana de filosofía de la ciencia*, Vol. 3(7), 59-84.

[6] Ausejo, Elena. (1993). *Las matemáticas en el siglo XVII*. Ediciones AKAL. Vol. 17.

[7] Banach, Stefan. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fund. math*, Vol 3 (1), 133-181.

[8] Banach, Stefan. (1932). Théorie des opérations linéaires. *Instituto de Matemáticas de la Academia de Ciencias de Polonia*. Varsovia.

[9] Boyer, Carl. B. & Merzbach, Uta. C. (2011). *A history of mathematics*. New Jersey. John Wiley and Sons.

[10] Bucher, Walter. & Frölicher, Alfred. (2006). *Calculus in vector spaces without norm*. Springer, Vol 30.

[11] Daniell, Percy J. (1919). Functions of limited variation in an infinite number of dimension. *Annals of Mathematics*, 30-38.

[12] Descartes, René. (1947). *La geometría*; Traducida por Pedro Rossell Soler. Espasa-Calpe. Buenos Aires.

[13] Dieudonné, Jean. (1983). *History of functional analysis*. Vol. 49. Amsterdam. Elsevier.

[14] Dini, Ulisse. (1878). *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*. T. Nistri. Pisa.

[15] Fichera, Gaetano. (1994). Vito Volterra and the birth of functional analysis. Development of Mathematics 1900-1950, *Birkhauser Verlag*, Basel (Suiza), pp. 171-183.

[16] Fréchet, Maurice. (1912). Sur la notion de différentielle totale. *Nouvelles annales de mathématiques 4 série*, tome 12, p. 385-403.

[17] Fréchet, Maurice. (1913). Sur la notion de différentielle dans le calcul fonctionnel. *Imprimerie national*.

[18] Fréchet, Maurice. (1914). Sur la notion de différentielle d'une fonction de ligne. *Transactions of the American Mathematical Society*. Lancaster, USA. Vol. 15(2), p. 135-165.

[19] Fréchet, Maurice. (1925). La notion de différentielle dans l'analyse générale. *In Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure* Vol. 42, pp. 293-323. Elsevier.

[20] Fréchet, Maurice. (1928). Les Espaces Abstraits et leur théorie considérée comme Introduction á l'Analiyse Générale. *Gauthier-Villars*, París; pp. 1-21.

[21] Fréchet, Maurice. (1933). *Notice sur les travaux scientifiques*. París, Hermann.

[22] Fréchet, Maurice. (1934). *L'arithmétique de l'infini*. París, Hermann.

[23] Fréchet, Maurice. (1937). Sur la notion de differentielle. *Nouvelle annale de mathematique*, 845.

[24] Fréchet, Maurice, & Machado, Gustavo. (1958). *Las matemáticas y lo concreto*. Universidad Nacional Autónoma de México, Dirección General de Publicaciones.

[25] Gâteaux René. (1913). Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques. *CR Acad. Sci.* Paris, 157(325-327), 65.

[26] Gâteaux René. (1919). Fonctions d'une infinité de variables independantes. *Bull. Soc. Math. Fr*, Vol. 47, 70-96.

[27] Gonseth, Ferdinand. (1941). *Les Entretiens de Zurich Sur les Fondements Et la Méthode des Sciences Mathématiques*. 6-9 Décembre 1938 Exposés Et Discussions.

[28] Goodstein, Judith R. (2007). The Volterra Chronicles: The Life and Times of an Extraordinary Mathematician, 1860-1940. Vol. 31. *American Mathematical Soc.*

[29] Guerraggio, Angelo, & Paoloni, Giovanni. (2010). *Vito Volterra*. Vol. 15. Montereggio, Springer-Verlag.

[30] Hadamard, Jacques. (1902). Sur les dérivées des fonctions de lignes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*. Vol. 30. p. 40-43.

[31] Hadamard, Jacques. (1912). Le calcul fonctionnel. *Enseignement Mathématique*, p. 1-18.

[32] Hadamard, Jacques. (19239. *La notion de différentielle dans l'enseignement*. Hebrew University.

[33] Hadamard, Jacques. (1928). *Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel*. In Atti del Congresso Internazionale dei Matematici: Bologna del 3 al 10 de settembre di 1928 pp. 143-162).

[34] Hadamard, Jacques. (1954). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Courier Corporation. .

[35] Kleiner, Israel. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, Vol. 20(4), 282-300.

[36] Lévy, Paul. (1922). *Leçons d'analyse fonctionnelle: professées au Collège de France.* Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions.

[37] Lévy, Paul. (1955). *Problèmes concrets d'analyse fonctionelle: Avec un complément sur les fonctionelles analytiques*. París, Gauthier-Villars.

[38] Nashed, M. Z. (1971). *Differentiability and related properties of nonlinear operators: Some aspects of the role of differentials in nonlinear functional analysis*. In Nonlinear functional analysis and applications, 103-309.

[39] Novy, L. (1933). Las matemáticas en la enciclopedia de Diderot y D'Alembert. *Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, Vol. 16(30), 265-284.

[40] Nurzia, L. (1987). La corrispondenza tra Vito Volterra e Maurice Fréchet sui fondamenti del´analisi funzionale. *Revista di storia della scienza*; 4(3), pp 391-397.

[41] Pierre, Jean-Paul. (1996.) *Histoire de l'intégration: vingt-cinq siècles de mathématiques.* asson. París, Elseiver Masson.

[42] Recalde, Luis C. (2010). *La teoría de funciones de Baire: La constitución de lo discontinuo como objeto matemático*. Cali, programa editorial de la universidad del Valle.

[43] Recalde, Luis C. (2018). *Curso de análisis básico con anotaciones histórico-epistemológicas*. Cali, Universidad del Valle. (En prensa)

[44] Recalde, Luis C. (2018). *Lecturas de historia de las matemáticas*. Cali, programa editorial de la universidad del Valle.

[45] Riemann, Bernhard. (1876). *Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría (sf)*. Traducción de la memoria póstuma de B. Riemann, publicada por R. Dedekind e incluida en el tomo XIII de las memorias de la Sociedad de Ciencias de Göttingen.

[46] Stolz, Otto. (1893). *Grundzüge der Differential-und Integralrechnung: th. Reelle veränderliche und functionen*. Vol. 1. BG Teubner.

[47] Thim, Johan. (2003). *Continuous nowhere differentiable functions (Dissertation)*. Recuperado de http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:ltu:diva-49636.

[48] Vera Francisco. (1970). *Cientificos griegos (Ediciones en español de los Elementos de Euclides, las cónicas de Apolonio, la aritmética de Diofanto y la Colección Matematica de Pappus)* Vols. 1-2. Aguilar. Madrid.

[49] Volterra, Vito. (1887a). Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni. *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*. IV, 3, 1887, 274-281.

[50] Volterra, Vito. (1887b). Sopra le funzioni dipendenti da linee (Nota I - II). *Tip. della R. Accademia dei Lincei*.

[51] Volterra, Vito. (1889). Sur une genéralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. *Acta Mathematica*, 12(1), 233-286.

[52] Volterra, Vito. (1891). Sopra un'estensione della teoria Jacobi-Hamilton del calcolo delle variazioni. *Tip. della R. Accademia dei Lincei*, IV, 6, 1891, 127-138.

[53] Volterra, Vito. (1897). Un teorema sugli integrali multipli. *Scienze di Torino*. 32, 1896-97, 859-868.

[54] Volterra, Vito. (1921). Funzioni di linee, equazioni integrali e integro-differenziabilii. *Anales de la Sociadad Cientifica Argentina*.

[55] Volterra, Vito. (1954). Funzioni dipendenti da un'altra funzione con punti eccezionali. Opere Matematiche. Memorie e note. Volume primo, 1881-1892, *Accademia Nazionale dei Lincei*, Capítulo XVII, Roma, pp. 303-308.

[56] Winter, Maximilien. (1913). Les principes du calcul fonctionnel. *Revue de Métaphysique et de Morale*, Vol. 21(4), 462-510.